PUC Minas

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES EM LIVROS DIDÁTICOS (1930-1970): apontamentos para formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins

Célio Moacir dos Santos

Elenice de Souza Lodron Zuin

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES EM LIVROS DIDÁTICOS (1930-1970): apontamentos para a formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins

Célio Moacir dos Santos

Elenice de Souza Lodron Zuin

APRESENTAÇÃO

Este material foi elaborado como parte integrante da pesquisa de dissertação do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, intitulada *"Sistemas de equações lineares: uma análise de livros didáticos publicados no Brasil (1930 a 1970)".*

Temos como objetivo auxiliar a formação inicial e continuada dos professores de Matemática e áreas afins, dentro de uma perspectiva da História da Educação Matemática e atendendo, também, os docentes em serviço. Focalizamos os sistemas de equações lineares e procuramos evidenciar as mudanças e/ou continuidades ocorridas em relação ao ensino-aprendizagem deste tópico, entre o período do Método Intuitivo até a vigência do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Para cumprir esse intento, selecionamos alguns autores de livros didáticos.

Legitimamos a importância dos licenciandos e professores em serviço se apropriarem da história de um conteúdo escolar, das reformas ocorridas no ensino brasileiro, ampliando sua visão ao conhecerem as propostas de outros autores, em décadas passadas, e se posicionarem frente aos saberes escolares com uma postura mais crítica. Ainda, para os docentes, em seu trabalho em sala de aula, apresentamos diferentes possibilidades para a abordagem dos sistemas de equações lineares com duas incógnitas a partir das metodologias propostas por alguns autores de livros didáticos, tendo como marco inicial uma publicação de Antonio Trajano, do ano de 1932.

Partimos de uma vertente histórica do conteúdo de sistemas de equações, resgatando as contribuições dos babilônios dentre outros povos e tratamos de alguns aspectos referentes à história da álgebra. Fazemos menção a reformas educacionais existentes entre 1930 e 1970, período no qual se situam os livros didáticos pesquisados. Destacamos nas análises, como era introduzido o conteúdo, características de alguns exercícios/problemas e exemplos encontrados nas obras, com o objetivo de investigar como era a abordagem dessas atividades sob a perspectiva de cada um dos autores.

É notório que, em geral, um determinado conteúdo escolar é abordado pelos autores de textos didáticos sem levar em conta a sua história, a sua gênese e, como reflexo desse fato, percebe-se, muitas vezes, uma lacuna e um não entendimento de determinadas particularidades de um assunto. Os professores que se apoiam nesses materiais tendem a reproduzir o livro didático, não focando as abordagens históricas.

Sugerimos que sejam realizados grupos de estudo e discussão para os temas abordados nesse material e, posteriormente, que sejam analisados livros atuais que contenham o tópico sistemas de equações lineares.

Esperamos que esses apontamentos possam trazer outros pontos de vista, tanto para aqueles que estão em formação inicial, como para os educadores que já atuam profissionalmente, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem, gerando reflexões sobre as continuidades e alterações pelas quais passam um determinado conteúdo escolar e a importância de se conhecer a História da Educação Matemática.

Os autores

SUMÁRIO

1. OS SISTEMAS DE EQUAÇÕES: aspectos históricos

Os sistemas de equações são tópicos presentes nos ensinos fundamental, médio e superior de vários cursos da área de Ciências Exatas, cada um trazendo as suas especificidades e agregando novos conhecimentos de forma gradativa. Apesar de ter uma gama de utilizações, como por exemplo, em modelagem matemática ou em estudos mais aprofundados de Álgebra Linear, os sistemas de equações, em geral, costumam não estar entre os tópicos dos quais se ressalta a sua história.

Nesse momento, advém uma pergunta, até mesmo para situarmos o nosso estudo. É importante termos conhecimentos históricos da Álgebra, sobretudo, conhecimentos que nos auxiliem nos estudos sobre sistemas de equações? Essa pergunta é imprescindível, na medida em que, nos faz refletir sobre o papel da Álgebra e a sua importância como campo de conhecimento matemático. Sabemos que, em certos momentos da história, a Álgebra ficou em segundo plano em relação à Aritmética e a Geometria. Podemos referendar essa informação em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), quando pontuam que, durante o desenvolvimento da matemática, a Álgebra sempre ficou às margens dos outros ramos.

Vamos ao encontro de Chervel (1990) quando destaca a relevância de situarmos historicamente um conteúdo escolar, descrevendo a sua evolução, quais as mudanças ocorridas em um determinado período e sempre estabelecendo ligações com o seu ensino e suas finalidades.

> Cabe–lhe dar uma descrição detalhada do ensino em cada uma de suas etapas, descrever a evolução da didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício. (CHERVEL, 1990, p.192).

Consideramos importante realizar um estudo histórico sobre sistemas de equações lineares, entendendo que, dessa forma, seria permitida uma melhor identificação de sua natureza epistemológica.

> Os vínculos de tipo epistemológico foram assim denominados por sugerirem que a finalidade da educação matemática é fazer com que o estudante compreenda e se aproprie da própria Matemática concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2008, p.70).

Muito antes da Álgebra, técnicas da Aritmética eram usadas para solucionar problemas. Essas técnicas eram utilizadas para resolver equações, na maioria das vezes, respondendo às necessidades da época. De acordo com Baumgart (1992), a Álgebra inicia de uma forma retórica, passa a sincopada até chegar à álgebra simbólica que conhecemos hoje.

Em documentos antigos como o *Papiro Rhind* e *Papiro de Moscou* encontramos problemas que remetem às equações lineares. De acordo com Dorier (1990), os conceitos de equação já começaram aparecer através de métodos aritméticos, sob uma forma retórica, dessa maneira, alguns problemas eram equacionados e resolvidos por métodos que remetem aos sistemas de equações lineares com uma, duas, ou três variáveis.

De acordo com Eves (2004), quando nos referimos à História da Matemática ocidental antiga, não podemos perceber uma expressiva utilização de sistemas de equações lineares. Esse assunto obteve maior relevância, no Oriente, pelos chineses, com seu gosto especial por diagramas. Dessa maneira, através da curiosidade chinesa, acabaram descobrindo um método de resolução por eliminação. Esse método consistia em anular coeficientes por meio de operações elementares. Os procedimentos podem ser encontrados na obra "Nove capítulos sobre a arte da matemática", provavelmente datado em 250 a.C.

Segundo Coulange (2000), podemos considerar que a aritmética, desenvolvida em civilizações antigas é, de alguma forma, uma pré-história da Álgebra, pois era sempre alimentada com uma pré-álgebra, antes do advento da linguagem formal.

No quadro 1, apresentamos uma síntese histórica dos principais acontecimentos dos diferentes povos e suas diferentes culturas, com seus trabalhos relacionados com as equações lineares e sistemas de equações lineares. Essa abordagem foi sintetizada dos estudos de Collette (1986), no livro *Historia de las matemáticas*. Coulange (2000), na obra *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique*. Boyer (2003), em sua *História da Matemática*. Eves (2004), em sua *Introdução à História da Matemática* e Rosa e Orey (2013), no artigo *Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio,* em que tentamos elencar fatos históricos importantes para subsidiar este propósito.

Quadro 1 – Equações lineares: síntese histórica

OS BABILÔNIOS	Os problemas babilônicos e suas resoluções expressavam-se em uma linguagem algébrica completamente retórica e já com um alto grau de desenvolvimento. Muitas vezes, os problemas faziam referências à vida cotidiana ou a questões de geometria: por exemplo, para calcular o comprimento e largura de um campo retangular, sabendo a sua superfície, etc. Portanto, muitos dos problemas poderiam ser resolvidos por sistemas de duas equações com duas incógnitas, geralmente uma equação linear da forma $x \pm y = a$ e uma equação quadrática como $xy = b$ ou $x^2 = y^2 = b$. Os povos da Mesopotâmia faziam uso de tabletes de argila para seus registros (figura 1). Em suas resoluções utilizavam-se do método da substituição e, outras vezes, usava-se mudanças de variáveis (ROSA; OREY, 2013; COULANGE, 2000).
OS EGÍPCIOS	Assim como os babilônios, os egípcios se interessavam em resolver problemas práticos, ou seja, problemas que eram ligados com sua vida cotidiana, por exemplo: em distribuição de pães e de grãos. A linguagem utilizada era essencialmente retórica. Outro ponto importante era sobre os problemas encontrados no *Papiro Rhind* e no *Papiro Moscou,* nos quais muitos deles eram relacionados com quantidades, sem qualificação, o que lhes dava certo grau de generalização. Alguns dos problemas do *Papiro Rhind* e *Papiro Moscou* (figuras 2 e 3), ocupavam-se de situações que consideraríamos como sendo hoje, típicas de serem equacionadas por equações lineares (COLLETTE, 1986).
OS CHINESES	Um dos mais importantes textos dos chineses antigos é o *K'iu-ch'ang Suan-Shu* ou *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* (figura 4), datado de 250 a.C., no qual já se discutia muitos problemas que remetem aos sistemas de equações lineares em duas variáveis, uma das quais aparece sempre com o coeficiente 1. $y = ax + b \quad e \quad y = a'x + b'$. O método de resolução se assemelhava muito ao processo de eliminação por adição (BOYER, 2003; IVES, 2004).
OS INDIANOS	No trabalho intitulado de *Ganita-Sara-Sangraha*, provavelmente escrito por volta de 850 d.C., por Mahavira, encontravam-se muitos problemas que se reportavam a sistemas de várias equações com várias incógnitas. A resolução desses sistemas apresentava-se de forma essencialmente retórica. No entanto, pode ser encontrado algum tipo de símbolo, uma vez que nos problemas costumavam-se utilizar incógnitas com diferentes nomes e cores. Os métodos de resolução podem ser classificados como método de eliminação (EVES, 2004).
OS GREGOS	O privilégio concedido à geometria na Grécia, de alguma forma, desviou o interesse dos matemáticos sobre as questões algébricas. No entanto, encontraram-se algumas abordagens referindo-se a problemas lineares geométricos, relacionadas com o cálculo de áreas, envolvendo quantidades diferentes, com valores desconhecidos que deveriam ser encontrados através da utilização de sistemas de equações (BOYER, 2003; EVES, 2004).
OS ÁRABES	A Matemática árabe desenvolveu-se fortemente desde o século VII. Bagdá se tornou um grande centro científico com muitas bibliotecas. Os árabes aproveitaram a herança grega e Oriental dos séculos VII e VIII e fizeram traduções de várias obras antigas. O livro de Abu Jafar Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (c.780 - c.850), *Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala* (figura 5) trouxe precisas atividades *sobre o "cálculo da al-jabr"* (de onde derivou o termo álgebra). Este livro é essencialmente dedicado à resolução de problemas de heranças e outros problemas práticos da vida cotidiana da época. Em seu contexto, trazia uma linguagem totalmente retórica. Alguns problemas poderiam ser resolvidos utilizando equações de primeiro e segundo grau com coeficientes positivos. Podem-se encontrar métodos de resolução de problemas por sistemas de equações relacionadas com várias incógnitas, alguns de caráter indeterminado. (EVES, 2004).

Fonte: Dados elaborados pelos autores

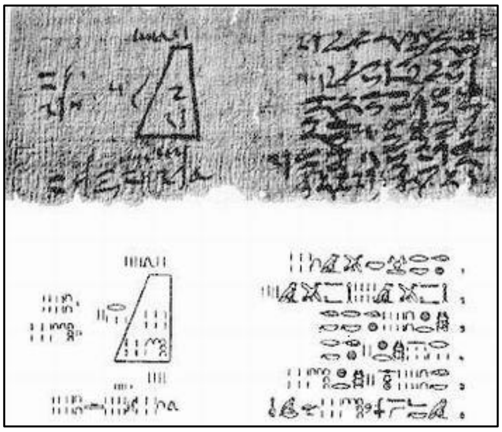
**Figura 1 – Tablete sumério com diagrama geométrico[1]
(Universidade de Nova York)**

Fonte: http://destruidordedogmas.com.br/tag/sumerio/

Figura 2 - Detalhe do Papiro Rhind

Fonte: http://matemolivares.blogia.com/2015/octubre.php

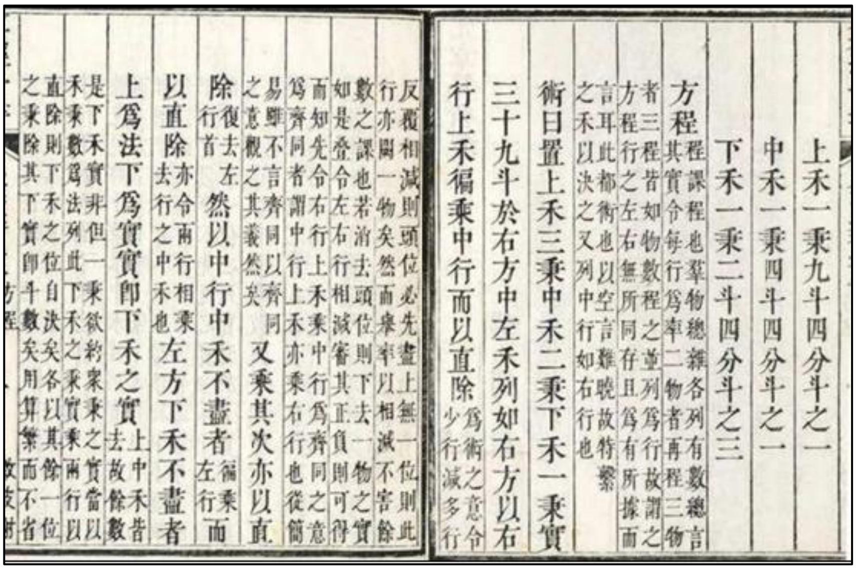
Figura 3 - Detalhe do Papiro de Moscou



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html

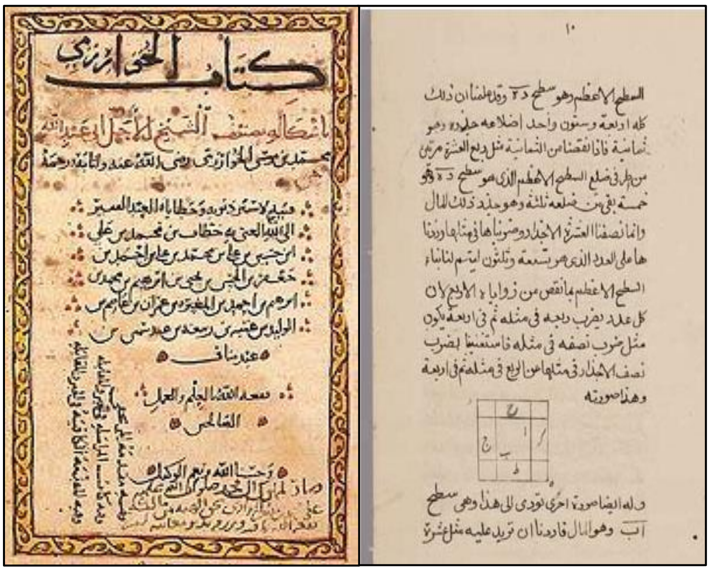
[1] O tablete é registrado como YBC 7289 – trata-se de um disco de argila, no qual está representado um quadrado e suas diagonais. Ao lado de uma das diagonais é expresso o valor numérico 1,24,51,10, na base 60, que corresponde a 1,414221295, ou seja, uma aproximação da raiz quadrada de 2.

Figura 4 - Problema 1, Capítulo 8 do *Jiu Zhang Suan Shu*



Fonte: http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10_yuan-ya-xiang.pdf

Figura 5 – Uma página de *Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala, de* al-Khwarizmi



Fonte: http://sameaf.mfa.go.th/th/muslim_world/detail.php?ID=2661

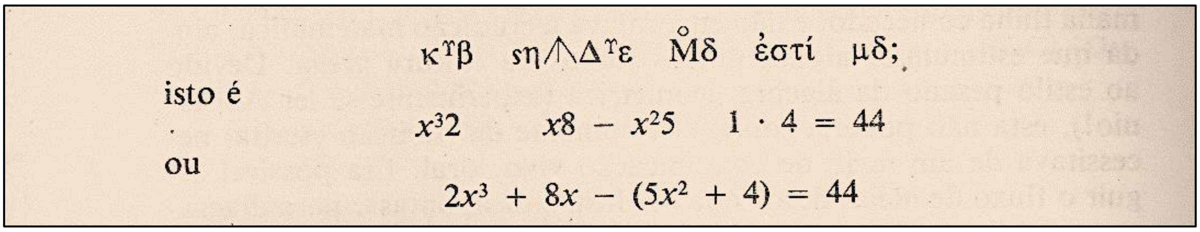
Segundo Baumgart (1992), podemos nos referir à Fase Retórica ou Verbal, iniciando-se a partir dos babilônios (1700 a. C) até por volta de 250 d.C. com o matemático grego, Diofanto[2] (~200 d.C. - ~284 d. C.). Nesse momento da Álgebra, havia pouca presença de símbolos e de abreviações para expressar o pensamento algébrico. Toda a escrita, concernente a números e equações, era retratada em linguagem verbal. Parece-nos, então, apropriado nos

[2] A data de nascimento e morte de Diofanto são imprecisas, mas é consensual que ele nasceu próximo do ano de 200 d.C, e que sua morte foi próxima do ano de 284 d. C.

referirmos a esse estilo, considerando-o uma Álgebra dos egípcios, dos babilônios e dos gregos pré-diofantinos.

A Álgebra Sincopada, aproximadamente do século III d.C. ao século XVII, é o período em que são adotadas determinadas abreviações e símbolos para algumas operações. Diofanto dá uma nova roupagem à Álgebra. De acordo com Baumgart (1992), Diofanto inseriu um novo estilo ao se escrever uma equação. Podemos observar um exemplo, que deixa claro como era escrito uma equação nesse período (figura 6).

Figura 6 – A escrita de uma equação



κ^Υβ ςη⋀Δ^Υε M̊δ ἐστί μδ;

isto é

$x^3 2 \quad x 8 - x^2 5 \quad 1 \cdot 4 = 44$

ou

$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$

Fonte: Baumgart (1992, p.10)

E, por último, temos a Álgebra Simbólica; esse modelo começou a despontar por volta de 1500. Ela se caracteriza pelos estudos das estruturas matemáticas e não mais pelos procedimentos para resolver problemas pontuais. O seu simbolismo veio se aperfeiçoando, de maneira gradual, com a padronização de algumas notações. Consentimos com Baumgart (1992), quando ele afirma com veemência que,

> O divisor de águas do pensamento algébrico (separando o antigo fluxo raso da "solução manipulativa de equações" da moderna corrente profunda que começa com propriedades teóricas das equações) concretizando no francês François Viète, que foi o primeiro, em sua *logística speciosa*, a introduzir letras como coeficientes genéricos (positivos) e a dar alguns outros toques de acabamento no simbolismo que se finalizou e atualizou na época de Newton. (BAUMGART, 1992, p.14).

De acordo com esse autor, percebemos a importância de François Viète (1540 - 1603), nesse contexto do desenvolvimento da linguagem algébrica, sendo um precursor na introdução de letras para a representação de coeficientes genéricos. Gil (2001, p. 28) indica que no terceiro capítulo do livro *Introdução à Arte Analítica*, de Viète, o autor nomeia os termos escalares, ou seja, as potências de grandezas desconhecidas, utilizando os termos "*latus* ou *radix* , *quadratum* , *cubus, quadrato-quadratum* , *quadrato-cubus, cubo-cubus, quadrato-quadrato-cubus, quadrato-cubo-cubus, cubo-cubo-cubus,* etc." Posteriormente, Viète trata das grandezas de comparação, definindo os gêneros das grandezas conhecidas, "enunciando-os pela mesma ordem dos termos escalares: *longitudo* ou *latitude* , *planum, solidum, plano-planum, plano-*

solidum, *solidosolidum*, *plano-plano-solidum*, *plano-solido-solidum*, *solido-solido-solidum*, etc.”. Viète foi o primeiro a utilizar o termo *aequalis* para se referir a igualdade e, tempos depois, passou a utilizar o símbolo ~ com a mesma finalidade. (STEWART, 2014). Por exemplo, para a equação

$$x + bx = c$$

na notação de Viète, teríamos

A quad. + A in B é igual a Cplanum. (GIL, 2001, p. 28)

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) confirmam a importância de Viète dizendo que a Álgebra ganha uma nova estrutura, com a introdução de um simbolismo mais moderno com alguns símbolos específicos.

2. ASPECTOS DA LEGISLAÇÃO E PROPOSTAS EDUCACIONAIS DA DÉCADA DE 30 À DÉCADA DE 70 DO SÉCULO XX NO BRASIL

Trazemos um breve relato histórico dos acontecimentos provenientes do período entre as décadas de 30 à década de 70 do século XX no Brasil.

Na primeira metade no século XIX, havia inúmeros problemas relativos à educação no Brasil. De acordo com Stephanou e Bastos (2005), o descontentamento popular com o sistema de ensino era muito grande nessa época. Os estudantes tinham dificuldades com a escrita, com a leitura e com os cálculos primários. Um novo método de ensino, denominado intuitivo, também chamado de *lições de coisas*, surge com a proposta de valorização da intuição, ou seja, o conhecimento decorria dos sentidos e da observação (SOUZA, 1998). Esse método surgiu na Alemanha, em fins do século XVIII, decorrente da influência da Pedagogia de Johann Henri Pestalozzi (1746 – 1827), um de seus proclamadores (VALENTE, 2012). A adesão ao método intuitivo ocorreu em escolas da Europa e Estados Unidos, chegando ao Brasil por meio dos professores adeptos a novidades educacionais estrangeiras, difundindo-se inicialmente em algumas escolas particulares nas principais cidades brasileiras (REMER; STENTZLER, 2009).

Valdemarin (1998) destaca que esse método surge com o propósito de reverter o quadro educacional vigente, um quadro de valorização a repetição e memorização sem a efetiva aprendizagem. Essa mesma autora indica que, para orientar os professores da época, foram produzidos materiais didáticos adequados a essa nova concepção de ensino, numa linguagem adequada ao estudante, com o objetivo de facilitar o entendimento e que, gravuras, cores e formas eram fundamentais nesse processo.

A promoção da adoção do método intuitivo no país ocorreu, tendo Rui Barbosa como um dos seus principais divulgadores. Zuin sublinha que

> Rui Barbosa já trouxera as *Lições de Coisa*s, de Norman Calkins, em sua primorosa tradução; seus pareceres deixavam explícitas as suas concepções sobre educação, e o ensino intuitivo ganhava adeptos se fazendo presente em diversas escolas. Para que as reformas da instrução pública se fizessem cumprir, eram destacados princípios para essa escola diferente, na qual os mestres e mestras deveriam ter outro papel, privilegiando nos infantes o cultivo da observação, a intuição, o exercício reflexivo dos sentidos; partindo dos objetos concretos e dos elementos da natureza, se ascenderia à abstração. A criança teria uma outra relação com o conhecimento. Os republicanos tinham a escola como uma das diretrizes para a efetivação de suas principais aspirações. Era primordial a formação de um novo cidadão, imerso na nova forma de organização política, completamente distinto do munícipe dos tempos do Império. Escola e República, andando de mãos dadas, rumo ao futuro do país: esta era a meta. (ZUIN, 2016a, p.2).

O cenário da adoção do ensino intuitivo no Brasil é apontado por Faria Filho e Vidal (2000), salientando, também, a necessidade de criação de espaços escolares. Os autores indicam que ocorreu

> [...] a necessidade de que se construíssem espaços próprios para a escola, como condição mesma de realização de sua função social específica. Assim, os defensores do método intuitivo, [...], argumentavam a necessidade de o espaço da sala de aula permitir que as diversas classes pudessem realizar as lições de coisas. Somava-se a isso, que a escola foi, sobretudo ao final do século XIX, sendo invadida por todo um arsenal inovador de materiais didático-pedagógicos (globos, cartazes, coleções, carteiras, cadernos, livros...) para os quais não era possível mais ficar adaptando os espaços, sob pena de não colher, desses materiais, os reais benefícios que podiam trazer para a instrução. (FARIA FILHO; VIDAL, 2000, p.6).

O Método Intuitivo, para Schelbauer (2003), representou a base de uma organização de ensino elementar se estendendo às classes populares da Europa e de vários países das Américas. Esses princípios estavam sendo introduzidos nos jardins de infância, nos programas das escolas primárias e nos cursos de formação de professores. "A presença da professora se faz necessária para conduzir os alunos nas atividades, suscitando indagações que serão respondidas através das observações e conjecturas do aprendiz. O aluno é um agente ativo na produção do conhecimento". (ZUIN, 2002, p. 435).

As questões inerentes à forma de se trabalhar o método intuitivo no Brasil, estendem-se até por volta de 1930 e, paralelamente, junto a essa situação, aparece novos ideários, a Escola Nova. Segundo Saviani (2011), os ideais escolanovistas já se iniciavam em nosso país, no final do século XIX e início do século XX, em oposição ao tradicional método jesuítico.

Os ideais da Escola Nova passam a ser discutidos, no Brasil, dentro de uma necessidade de modificar a educação primária, com o objetivo de expansão e desvinculação do ensino tradicional. Saviani (2006) relata que o fascínio por esse método era grande, pois seus procedimentos, centrados na atividade do aluno, eram bem conceituados. Ainda, de acordo com Saviani (2006), através do Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, publicado em 1932, configurou-se um dos mais representativos movimentos nacionais para a fundação do sistema de educação pública.

Azevedo (1976) afirma que, as concepções escolanovistas estavam voltadas para uma renovação da mentalidade, por parte dos educadores, num sentido de melhoramento de suas práticas pedagógicas. O mesmo autor garantiu que, com a publicação do "Manifesto dos Pioneiros da Escola Nova" foram norteados princípios educacionais de forma sistematizada, apoiados em teorias educacionais modernizadoras. Esse manifesto consagrou-se como um marco da proposta de renovação educacional do país.

Esse manifesto preconizava uma organização, por parte do Estado, de uma escola pública, laica e gratuita. Os princípios da Escola Nova se pautavam na liberdade, criatividade e na valorização da experiência pessoal dos educandos. Do ensino intuitivo para a Escola Nova, o estudante "passa do papel de observador para o papel de experimentador". (ZUIN, 2016b, p.4).

Zuin (2016a, 2016b) traz alguns princípios da Escola Nova para o ensino e aprendizagem, de uma forma geral, e para o ensino de conteúdos matemáticos, de uma forma particular, baseando-se em alguns autores, evidenciado que os escolanovistas condenam a memorização e repetição mecânica. A autora destaca a utilização de material concreto, dos jogos; análise e resolução de problemas, com enunciados relacionados ao cotidiano, sem situações absurdas ou inverossímeis. Sublinha a importância de despertar o interesse dos estudantes, os problemas devem conter informações dentro de um contexto social, econômico ou cívico – a contextualização é fundamental. Aponta, também, a necessidade de que os conteúdos sejam apresentados de forma clara e objetiva, respeitando-se a faixa etária dos alunos.

Em 1931, ocorre a Reforma Francisco Campos, por meio do Decreto Nº 19.890, de 18 de abril de 1931, que pretendia organizar todo o ensino secundário, de modo a serem integradas a Aritmética, Álgebra e Geometria, que eram cadeiras distintas congregando-as em uma única disciplina. Porém, não apenas nas escolas, elas ainda permaneciam separadas, com publicações de livros didáticos específicos. A partir da reforma, os conteúdos foram "unidos", assumindo o nome de Matemática.

Essa reforma assegurou a educação secundária em sete anos, cinco dos quais estavam vinculados o ensino fundamental e, dois, para o ensino complementar. Nessa divisão entre fundamental (cinco séries) e complementar (dois anos), a Matemática era lecionada em todas as séries do curso fundamental. Já no curso complementar, se fazia presente nos cursos de Medicina, Farmácia e Odontologia, assim como nos cursos de Engenharia e Arquitetura, só não sendo estudado no curso jurídico.

Foram publicados, no Diário Oficial da União, os Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundário e Instruções Metodológicas, sancionados em 30 de junho de 1931, dentro da Reforma Francisco Campos. Para a segunda série, eram prescritos, além de outros conteúdos: os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, problemas relativos a este tópico, representação gráfica da função linear de uma variável e resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas. Podemos verificar que, relativamente aos sistemas lineares, fazia-se uma correlação entre a álgebra e a geometria.

Nas instruções metodológicas, entre outros aspectos, a recomendação era no sentido de que para as séries iniciais

> [...] ás exigencias da pedagogia, de preferencia aos princípios puramente lógicos. Ter-se-á sempre em vista, em cada fase do ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno e os interesses para os quais tem maior inclinação. (BRASIL, 1931, p.12412).

Também se destacava:

> A necessidade de se renunciar completamente á pratica da memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático das demonstrações já feitas. Ao envés disso, deve a matéria ser levada ao conhecimento do aluno por meio da resolução de problemas e de questionário intimamente coordenados. Assim, os problemas não se devem limitar a exercícios dos assuntos ensinados, mas cumpre sejam propostos como processo de orientar a pesquisa de teoremas e de desenvolver a presteza na conclusão logica.
>
> [...]
>
> A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmonico, cujas partes estão em viva e intima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmetico, algebrico e geometrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas. (BRASIL, 1931, p.12413).

Verifica-se, nessas instruções metodológicas, o forte direcionamento para a junção da Aritmética, Álgebra e Geometria e também princípios da Escola Nova. Outros pontos se apresentam indicando uma forma interdisciplinar de trabalho com a Matemática. A indicação para que, "desde cedo", o professor deveria acostumar o aluno "a fazer, antes da resolução dos problemas, uma idéa aproximada do resultado, por estimativa ou por meio de esboço gráfico", nos possibilita inferir que esse apelo, ainda que se concentrasse em algum tipo de desenho, para auxiliar o entendimento e resolução de algum problema, também poderia ser estendido à resolução de sistemas de equações lineares. Confirma-se, neste sentido, o que está prescrito como conteúdo: "representação gráfica da função linear de uma variável e resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas". (BRASIL, 1931, p. 12413-12415).

Posteriormente, ocorreu a Reforma Gustavo Capanema, durante o período caracterizado como Estado Novo, entre os anos de 1937 a 1945. Surgiu um conjunto de decretos, deliberando portarias para a estruturação do ensino comercial, industrial e secundário. O decreto-lei

Nº 4.244, de 9 de abril de 1942, modificou e sistematizou o ensino secundário em dois ciclos: o primeiro ciclo, o ginasial, com quatro anos e, o segundo ciclo, com dois cursos paralelos, o curso clássico e o científico, com duração de três anos.

A Portaria Ministerial nº 170, de 11 de julho de 1942, estabelecia os programas de ensino para os cursos ginasial, clássico e científico. Para o ensino de Matemática, na quarta série, em um dos itens do programa, consta a resolução, discussão e interpretação gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas (VECHIA; LORENZ, 1998). Observa-se que a indicação da resolução gráfica para os sistemas lineares consta desse programa de modo bastante específico.

No Programa da Portaria Ministerial nº 996, de 2 de outubro de 1951, o conteúdo de sistemas está prescrito na segunda série, "Binômio linear; equações e inequações do 1º grau com uma incógnita; sistemas lineares com duas incógnitas". (VECHIA; LORENZ, 1998, p. 400). Na Portaria Ministerial nº 1045 de 14/12/1951, os Programas de Matemática do curso ginasial da segunda série se encontram com uma prescrição mais completa.

> Equações do primeiro grau com duas incógnitas, sistemas de equações simultâneas. Resolução de um sistema linear com duas incógnitas pelos métodos de eliminação por substituição, por adição e por comparação. Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas. Problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas; generalização; discussão. (BRASIL, 1951, p.7).

Observa-se, em ambas as portarias, nº 966 e nº 1045, a ausência do método de resolução gráfica, embora, na segunda, haja a recomendação de resolução de problemas envolvendo um sistema linear e a sua discussão.

Ainda na Portaria Ministerial nº 1045, as instruções metodológicas para o ensino da matemática, prescreviam:

> uma solicitação constante do aluno, que não poderá ser transformado em um mero receptor passivo de conhecimentos. O estudo de cada assunto deverá ser ilustrado com aplicações e exemplos que lhe despertem a atenção e o interesse.
> A unidade da matemática deverá ser posta em evidência, a cada passo, a fim de que seja percebida, com facilidade, a identidade dos métodos e dos procedimentos empregados nos seus diferentes ramos, muitas vezes, sem aparente inter-relação.
> Proceder-se-á sempre progressivamente, não impondo regas de raciocínio, se não quando o espírito do discente estiver apto para recebe-las.
> Especialmente nos primeiros anos do curso ginasial, o ensino terá caráter eminente prático e intuitivo.
> Procurar-se-á despertar, aos poucos, no aluno, o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração, introduzindo-se, ainda no curso ginasial, o método dedutivo, com o cuidado que exige.

> [...] O apelo à intuição jamais deverá ser dispensado. E a lição é de Jacques Hadamard, quando afirma que o rigor não tem tido outro objetivo senão o de sancionar e de legitimar as conquistas da intuição.
> Não se deverá ser esquecido que a matemática não é lógica pura, como se admitiu por muito tempo.
> Descer-se-á dar especial atenção, principalmente no curso ginasial, ao exato significado dos têrmos empregados, fugindo-se sempre, de simples memorização, que cansa e enfastia; do uso alusivo de definições, em particular de definições descritivas, o mais das vezes, viciosas; e, ainda, do recurso a demonstrações longas e pesadas que, ao invés de satisfazerem as necessidades lógicas que começam a ser despertadas, as embotam e atrofiam.
> O exercício e o exemplo deverão acompanhar a explanação da matéria, entremeando-se com a sua exposição. E, para os mesmos, necessário se torna solicitar, constantemente, a iniciativa do aluno. (BRASIL, 1951, p. 9).

Depreende-se das instruções metodológicas uma clara direção para as prescrições dos princípios da Escola Nova para o ciclo ginasial.

Segundo Valente (2004), essa reforma também manteve um caráter enciclopedista dos conteúdos, a mesma prática que vigorava na reforma Campos, ou seja, continuou um extenso número de conteúdos a serem estudados nesses dois ciclos.

Algumas décadas depois, podemos destacar o Movimento da Matemática Moderna (MMM), iniciado no Brasil, na década de 60 do século XX. Ainda de maneira tímida, suas discussões foram ganhando força nos congressos nacionais realizados em: Salvador (1955); Porto Alegre (1957); Rio de Janeiro (1959); Belém (1962) e São José dos Campos (1966). Silva e Silva (2012) comentam que, a principal discussão, que permeava no Brasil, nesses congressos, era uma análise crítica dos currículos vigentes e o aperfeiçoamento dos professores com relação às essas tendências modernas. E , segundo Soares (2005), foi uma das alterações curriculares que mais se tornou conhecida, com uma discussão bem difundida e empenhada, com ampla divulgação, embora não tivesse um caráter legislativo.

> A resposta à pergunta "porque a Matemática estava na linha de frente de uma reforma pedagógica" era pronta: "ela é a base de uma cultura geral voltada para a ciência e a tecnologia". *Moderna.* Esta foi a palavra-chave, a palavra guia, a palavra mágica, com toda a sua carga afetiva, mas também com toda a sua ambiguidade... (PIRES, 2000, p.20, grifo do autor).

Não podemos deixar de mencionar os grupos de estudos, que foram grandes divulgadores dos ideários modernistas. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), podemos destacar: o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), organizado por Osvaldo Sangiorgi em São Paulo no ano de 1961 e o Grupo de Estudos de Matemática (GRUEMA), também em São Paulo. Anos depois, compareceram o Grupo de Estudos em Educação Matemática em Porto

Alegre (GEMPA) e o Grupo de Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), no Rio de Janeiro, em 1976.

Com o MMM, os livros didáticos sofreram mudanças significativas, integrando uma axiomatização e estruturação algébrica, com uma forte predominância da teoria de conjuntos.

> Veiculada principalmente nos livros didáticos, sem adequada preparação dos educadores nem suficiente discussão de seus propósitos, a Matemática Moderna surgiu entre nós como substituta definitiva da velha Matemática, como a qual parecia não manter relação alguma. (PIRES, 2000, p.31).

Pinto (2005) também descreve a importância do livro didático para a divulgação do MMM, a saber,

> Ainda um tanto nebulosa, no Brasil, a matemática moderna ancora primeiramente nos grandes centros do país e começa, nos anos 60, a ser lentamente difundida nas escolas mais longínquas, a maioria delas recebendo-a de sobressalto, via livro didático. Carregada de simbolismos e enfatizando a precisão de uma nova linguagem, professores e alunos passam a conviver com a teoria dos conjuntos, com as noções de estrutura e de grupo. Repleta de promessas de um ensino mais atraente e descomplicado em superação à rigorosa matemática tradicional... (PINTO, 2005, p.29).

De acordo com Búrigo (1989), esses anseios, por mudanças educacionais, ocorreram com vistas à modernização e a introdução no país da necessidade de uma escola com uma visão de avivamento do processo modernista. Buscavam-se, na Matemática, essas características, com enfoques em conteúdos novos, substituindo abordagens clássicas, conferindo uma maior importância a aspectos lógicos e estruturais da Matemática.

Soares (2001) discorre sobre os exageros cometidos pela Matemática Moderna, principalmente, pelo enaltecimento em relação às linguagens simbólicas e sua estrutura extremamente formalista.

Fiorentini (1995) destaca que,

> A concepção formalista moderna manifesta-se na medida em que passa a enfatizar a Matemática pela Matemática, suas fórmulas, seus aspectos estruturais, suas definições (iniciando geralmente por elas), em detrimento da essência e do significado epistemológico dos conceitos. (FIORENTINI, 1995, p.16).

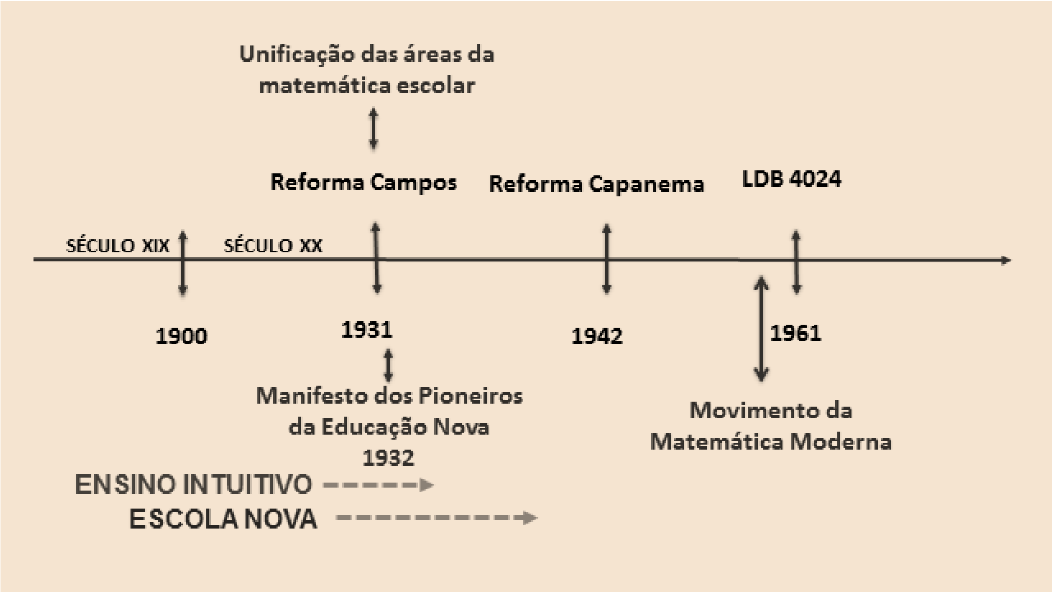
Do mesmo modo, podemos evidenciar a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação, LDB 4.024, de 1961. De acordo com Marchelli (2014), a aprovação dessa lei, aconteceu mediante a uma profunda e lenta discussão teórica sobre a imprescindível mudança que deveria acontecer, no Brasil, para que a educação de modernizasse. Essa lei organizou o ensino primário em quatro anos, sendo que, em seguida, o aluno ingressaria no curso ginasial, também de quatro anos, posteriormente, a formação escolar continuaria com o curso colegial de três ou quatro anos de duração. O ensino técnico de grau médio se subdividiu em: normal, industrial, comercial e agrícola. Quando o aluno concluísse o curso colegial, poderia ingressar no curso superior, através de um exame. A LDB de 1961 primou pela liberdade, pela emancipação do indivíduo, qualidade e uma preparação geral (ZUIN, 2016b). Pelo seu artigo 1º, a LDB 4.024, preconiza:

> Art. 1º A educação nacional, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por fim: a) a compreensão dos direitos e deveres da pessoa humana, do cidadão, do Estado, da família e dos demais grupos que compõem a comunidade; b) o respeito à dignidade e às liberdades fundamentais do homem; c) o fortalecimento da unidade nacional e da solidariedade internacional; d) o desenvolvimento integral da personalidade humana e a sua participação na obra do bem comum; e) o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhes permitam utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio; f) a preservação e expansão do patrimônio cultural; g) a condenação a qualquer tratamento desigual por motivo de convicção filosófica, política ou religiosa, bem como a quaisquer preconceitos de classe ou de raça (BRASIL, 1961).

Essa lei defendeu a liberdade e o respeito mútuo a todas as diferenças e condenava qualquer tipo de preconceito. Instituiu o direito a educação, assegurada pelo poder público e abertura ao ensino privado para os mais diferentes níveis de ensino.

Para finalizar este capítulo, a título de uma melhor visualização, elaboramos uma linha do tempo (figura 7), na qual demarcam-se a ocorrência das reformas e acontecimentos que tiveram impacto na educação brasileira dentro do período por nós estudado.

Figura 7 – Esquema demonstrativo – Marcos na educação brasileira



Fonte: Elaborada pelos autores

3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES, COMO O CONTEÚDO É TRATADO

Para estes apontamentos, apresentamos alguns elementos da análise de seis livros didáticos nos quais o tópico sistemas de equações lineares está presente, avaliando publicações num período de, aproximadamente, quarenta anos.

Os livros selecionados foram:

- Algebra Elementar, de Antonio Trajano (1932);
- Curso De Matemática, de Algacyr Munhoz Maeder (1948);
- Matemática Curso Ginasial 2ªsérie, de Osvaldo Sangiorgi (1959);
- Matemática Segunda Série Ginasial, de Ary Quintella (1961);
- Matemática Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi (1965);
- Matemática Moderna, de Agrícola Bethlem (1969).

Ressaltamos os aspectos metodológicos dos autores, destacando as formas de introdução do conteúdo e as atividades e exemplos propostos nas obras analisadas. Para substanciarmos esse nosso estudo, encontramos, mais uma vez, nas palavras de Chervel (1990) uma admirável importância aos exercícios, quando ele trata do núcleo de uma disciplina:

> Conteúdos explícitos e baterias de exercícios constituem então o núcleo da disciplina. As práticas de motivação e da incitação ao estudo são uma constante na história dos ensinos. A disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico. (CHERVEL, 1990, p. 205-207).

Listamos exemplos de como era apresentado o assunto, bem como, alguns exercícios e problemas. Procuramos observar como eram tratadas essas atividades em suas diferentes épocas, buscando encontrar particularidades que permitam caracterizar a metodologia dos seus autores. Seguiremos uma linha temporal que parte do ano 1932 chegando até 1969. E além das atividades propriamente ditas, exercícios/problemas e exemplos, daremos atenção também aos seus enunciados.

Gostaríamos de frisar que reproduzimos fielmente a grafia dos livros, sem qualquer alteração ortográfica.

Outro ponto a ser destacado é que nos livros de Maeder, Quintella e Sangiorgi encontramos uma resolução de um sistema de equações lineares com duas incógnitas genérico, a partir do qual, através do método de comparação, no primeiro autor e, do método de adição, nos dois últimos, chega-se à “fórmulas” de resolução. Nota-se que essa resolução é a mesma que se obtém com a Regra de Cramer, através da utilização de determinantes. Porém, encontramos essa apresentação de resolução também no livro *Théorie générale des équations algebriques* do francês Etiénne Bézout (1730 – 1783), escrito em 1779, que teve grande circulação e adoção na França e em outros países da Europa, com diversas edições, no séculos XVIII e XIX[3], sendo também utilizado nas escolas portuguesas e brasileiras, se tornando uma referência, inclusive sendo traduzido para o português. No século XIX, muitos autores se basearam em Bèzout para escrever os seus livros.

É pertinente fazermos uma distinção entre problemas e exercícios, sendo que para nos referendarmos vamos ao encontro de Vila e Callejo (2006), mencionando que:

> Reservaremos, pois, o termo *problema* para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita com conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova. (VILLA e CALLEJO, 2006, p.29).

Concordamos também, com Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004) em que ressaltam o problema como sendo algo que não temos compreensão de como fazer, mas que estamos interessados em fazer. Já para os exercícios, Romanatto (2012) vem nos dizer que eles demandam aplicação de fórmulas e aplicação de algoritmos.

Sendo assim, nesse trabalho, denotamos por *exercício a*s atividades dispostas nos livros, com o sistema de equações lineares já dado, nas quais o aluno basta identificar e aplicar um método de resolução. Denominamos *problemas* as atividades em que o estudante deve interpretar o enunciado, equacionar o sistema, escolher um método de resolução, antes de chegar a uma solução. No entanto, os autores dos livros analisados nem sempre utilizaram os termos exercícios e problemas, nestas mesmas acepções.

[3] Segundo Valente (2007), de 1770 a 1868, no catálogo da Biblioteca Nacional da França, são registradas mais de 75 edições da Aritmética de Bézout.

Ao iniciarmos com a 15ª edição da *Algebra Elementar*, de Antonio Trajano, publicada em 1932, percebemos que seria importante trazer elementos da história da educação brasileira retrocedendo ao final do século XIX, pois, apesar de não termos a data precisa da primeira edição, inferimos que a mesma foi publicada em fins do Oitocentos ou início do Novecentos.[4]

Ao analisarmos a mesma obra de Trajano, em sua 5ª edição, datada de 1905, não observamos nenhum tipo de mudança na sua obra referente ao tópico sistemas de equações lineares. Fato esse que, legitima nossa digressão histórica, pois o autor escreve outras de suas obras se pautando no ensino intuitivo (ZUIN, 2011).

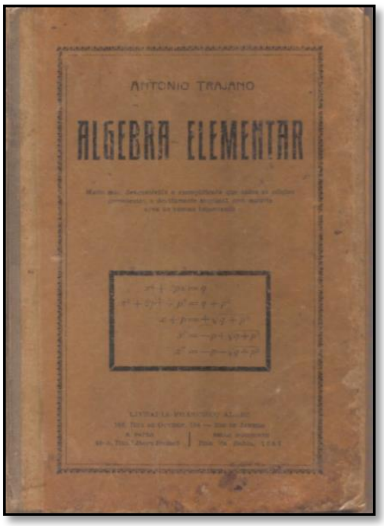
[4] Em geral, os livros publicados no século XVIII e primeiras décadas do século XIX não traziam a data de suas edições.

4. APONTAMENTOS ELENCADOS NOS LIVROS: o conteúdo sistema de equações lineares

Apresentaremos os livros didáticos utilizados, apontando cada autor e seu engajamento com as questões educacionais, principalmente sua relação com a Matemática. Procuramos também, através da introdução do conteúdo de sistemas e dos exercícios/problemas e exemplos, de cada obra, encontrarmos singularidades que possam estar presentes no conteúdo sistema de equações lineares, de forma a entendermos suas mudanças dentro de determinado período histórico.

4.1 Algebra Elementar, de Antonio Trajano (1932)

Figura 8 – Capa da Algebra Elementar de Antonio Trajano



Fonte: Acervo de Célio Moacir dos Santos

Antonio Bandeira Trajano nasceu em 1843, em uma cidade chamada Vila Pouca do Aguiar, Portugal, chegando ao Brasil aos quatorze anos de idade, mais precisamente em São Paulo. Mais tarde, ingressou no seminário, começando aí a sua carreira docente, pois lecionava em uma escola dirigida pela igreja na qual era seminarista. Trajano teve uma considerável importância na educação brasileira, diversos livros escritos, em sua maioria, sobre Aritmética e Álgebra atingindo inúmeras edições, sendo publicados mesmo após a morte do autor, em 1921, até o início da segunda metade do Novecentos (ZUIN, 2011).

No livro *Álgebra Elementar*, publicado em 1932, o autor inicia o assunto fazendo uma distinção entre equações simultâneas e equações independentes. Entendemos ser importante esse tipo de abordagem, pois propicia ao estudante, um entendimento sobre conceito de sistemas e suas soluções (figura 9).

Figura 9 – Diferença entre simultâneo e independente

As equações são **simultaneas** quando cada uma das incognitas tem o mesmo valor nessas equações; assim, $x+y=12$, e $3x-2y=11$ são duas equações simultaneas, porque em ambas x tem o valor de 7, e y tem o valor de 5.

As equações são **independentes** quando, embora tenham as mesmas lettras, só se satisfazem com valores differentes; assim $x+y=18$ e $x+y=36$ são equações independentes, porque teem as mesmas lettras, mas com valores differentes, pois em uma equação sommam 18, e em outra, 36.

Fonte: Trajano (1932, p.91)

Outro fato, a ser mencionado, é que o autor traz uma sequência de problemas resolvidos. Porém, em um olhar mais específico, as soluções propostas pelo autor são bem sucintas, não constando o seu passo a passo (figura 10).

Figura 10 – Problemas resolvidos

II Problema. A somma de dois numeros é 44, e um está para o outro assim como 5 está para 6. Quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero maior, e y o numero menor; então, como um está para o outro, assim como 5 para 6, segue-se que $5x=6y$. Subtrahindo a primeira equação da segunda para eliminar a lettra x, temos $y=20$ e $x=24$.

Este problema póde tambem ser resolvido com uma só incognita, na seguinte equação $5x+6x=44$.

$$\begin{array}{rl} x+y=44 & (1.^a) \\ 5x-6y=0 & (2.^a) \\ 5x+5y=220 & \\ \hline 11y=220 & \\ y=20 & \\ x=24. & \end{array}$$

Fonte: Trajano (1932, p.96)

E, logo após os problemas resolvidos, encontramos uma nova sequência de exercícios propostos, com suas respectivas respostas (figura 11).

Figura 11 – Problemas propostos

8. Um fazendeiro vendeu a um visinho 9 cavallos e 7 vaccas por 900$000, e a outro vendeu á razão do mesmo preço 6 cavallos e 13 vaccas pela mesma quantia. Qual é o preço de cada cavallo e de cada vacca?

Resp. 72$ e 36$.

9. Um viajante tinha dois cavallos que lhe custaram certo preço cada um; depois comprou um sellim inglez por 100$000; ora, quando elle punha o sellim no primeiro cavallo, este com o sellim valia o dobro do segundo; e quando punha o sellim no segundo, este com o sellim valia 3 vezes o primeiro. Quanto lhe custou cada cavallo?

Resp. 1.º=60$, 2.º=80$.

10. Se juntarmos 8 ao numerador de uma fracção, ella ficará igual a 2; mas se subtrahirmos 5 do denominador, a fracção ficará igual a 3. Qual é a fracção? Resp. ?

11. Ha dois numeros que sommam 37, e se 3 vezes o menor fôr subtrahido de 4 vezes o maior, e o resto dividido por 6, o quociente será 6. Quaes são os dois numeros?

Resp. 16 e 21.

12. Se subtrahirmos 3 de ambos os termos de uma fracção, ella ficará $\frac{1}{4}$ mas, se juntarmos 5 a ambos os termos, ella ficará $\frac{1}{2}$. Qual é a fracção? Resp. ?

13. Se o maior de dois numeros fosse multiplicado por 5, e o menor por 7, a somma dos seus productos seria 198; mas, se o maior fosse dividido por 5, e o menor por 7, a somma dos seus quocientes seria 6. Quaes são os numeros?

Resp. 20 e 14.

Fonte: Trajano (1932, p.97)

Ainda, sobre os exercícios/problemas encontrados nesse livro, as baterias de atividades foram separadas por métodos de resolução, em que, para o *método de redução ao mesmo coeficiente*, há doze exercícios e, apenas os três primeiros, vêm com as respostas. Posteriormente, para os outros métodos: *eliminação por comparação* e *eliminação por substituição*, são propostos seis exercícios em que os três primeiros apresentam suas respectivas respostas. E, por último, atividades que podem ser consideradas como problemas, pois, antes de resolvê-los, temos que transformar a sua linguagem nominal em linguagem algébrica. Encontramos dezesseis atividades com essa característica, todos problemas possuem duas equações e duas incógnitas, sendo seis problemas relacionados a aspectos do dia a dia.

Escolhemos cinco desses exercícios/problemas para que se tenha uma visão de como eram as atividades propostas sobre sistemas lineares com duas incógnitas.

Algumas observações comparecem no livro e são destacadas a seguir, tais como:

- Nos exercícios propostos, o autor em seu enunciado definia qual o método que deveria ser utilizado pelo aluno.[5]
- A utlização do termo "*methodo da reducção ao mesmo coefficiente"* para se referir ao método da adição*;*
- A não utilização das "*chaves"* para representar o sistema de equações;
- Problemas na tentativa de relacionar com o cotidiano, utilizando a moeda da época.[6]

[5] Considerar o exercício selecionado do livro de Trajano 1.
[6] Considerar os problemas selecionados do livro de Trajano 3, 4 e 5.

Alguns exercícios/problemas do livro de Trajano:

1.(TRAJANO, 1932, p.94) exercício nº 10 - Achar o valor de x e y nas seguintes equações, pelo methodo da reducção ao mesmo coefficiente:

$$11x - 10y = 14$$
$$5x + 7y = 41$$

2.(TRAJANO, 1932, p.94-95) exercício nº6 - O discípulo deve resolver as seguintes equações simultâneas eliminando a incógnita pelo methodo de comparação.

$$4x + 5y = 22$$
$$7x + 3y = 27$$

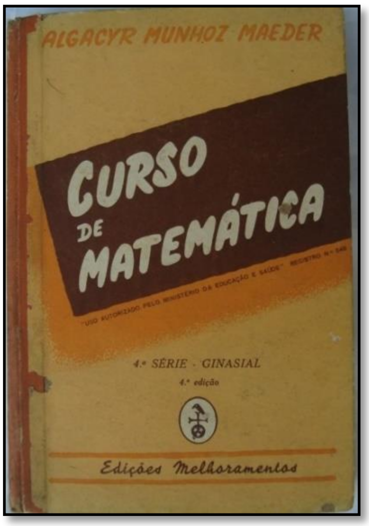
3.(TRAJANO, 1932, p.97) problema nº8 - Um fazendeiro vendeu a um visinho 9 cavallos e 7 vaccas por 900$000, e a outro vendeu a razão do mesmo preço 6 cavallos e 13 vaccas pela mesma quantia. Qual é o preço de cada cavalo e de cada vacca?"

4.(TRAJANO, 1932, p.97) problema nº9 - Um viajante tinha dois cavalos que lhe custaram certo preço cada um: depois comprou um sellim inglês por 100$000: ora, quando ele punha o sellim no primeiro cavalo, este com o sellim valia o dobro do segundo: e quando punha o sellim no segundo, este com o sellim valia 3 vezes o primeiro. Quando lhe custou cada cavalho?

5.(TRAJANO, 1932, p.97) problema nº14 - Arthur devia 500$000, e Henrique devia 600$000; mas nem um nem outro tinha dinheiro suffuciente para pagar o que deviam. Disse Arthur a Henrique: Empresta-me $\frac{1}{5}$ do teu dinheiro, e eu então poderei pagar o que devo; respondeu-lhe Henrique: Empresta-me $\frac{1}{4}$ do teu dinheiro, e eu pagarei também o que devo. Que quantia tinha cada um?

4.2 Curso de Matemática, de Algacyr Munhoz Maeder (1948)

Figura 12 – Capa do Curso de Matemática



Fonte: Acervo de Célio Moacir dos Santos

Algacyr Munhoz Maeder nasceu em Curitiba, capital do Paraná, no dia 22 de abril de 1903. Iniciou seus estudos na capital paranaense, passando depois a morar em São Paulo e estudou no Colégio São Bento. Depois, voltou a Curitiba para terminar seus estudos secundários e ingressar na Faculdade de Engenharia da Universidade Federal do Paraná, formando-se Engenheiro Civil. Publicou um total de dezenove livros de Matemática, no período que compreende os anos de 1928 a 1962, livros estes bem aceitos pela comunidade escolar (LONGEN,2007).

Resolução e discussão de um sistema de duas equações com duas incógnitas, assim se intitula o segundo capítulo do livro de Maeder. O autor inicia definindo uma equação do primeiro grau com duas incógnitas, trazendo alguns exemplos e mostrando que uma equação pode ter infinitas soluções, acrescentando que quando se tem esse tipo de solução, a equação se diz *indeterminada,* designando cada solução como "pares de valores" para se referir a um par ordenado. Logo após, apresenta duas equações lineares, com duas incógnitas, com sua respectiva solução, sem resolvê-lo. Define "quando procuramos determinar uma solução comum para duas ou mais equações com duas ou mais incógnitas, dizemos que as equações consideradas forma um sistema" (MAEDER, 1948, p.20). A seguir, define sistemas equivalentes, para, depois tratar da resolução de um sistema.

Maeder apresenta o *método de eliminação,* que ele subdivide em *eliminação por substituição, eliminação por comparação e eliminação por adição*, com exemplos, seguidos de suas respectivas resoluções. Para cada um dos métodos, o autor integra uma regra para sua resolução.

Com relação às atividades encontradas no livro em análise, temos inicialmente trinta e cinco exercícios, todos apresentam suas respostas ao lado. São propostos exercícios em que é necessário que o estudante tente encontrar valores para o coeficiente do sistema. Há um total de cinco exercícios, nos quais os comandos oscilam entre encontrar valores para que o sistema admita uma única solução ou para que o sistema seja indeterminado. E, para terminar, o autor traz um total de vinte problemas, todos com suas devidas respostas.

Há também, na parte final do assunto, uma interpretação gráfica utilizando os coeficientes de sistemas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$,indicando três casos possíveis. É analisado como se comporta a razão entre os coeficientes e que para cada caso temos uma representação gráfica diferenciada.

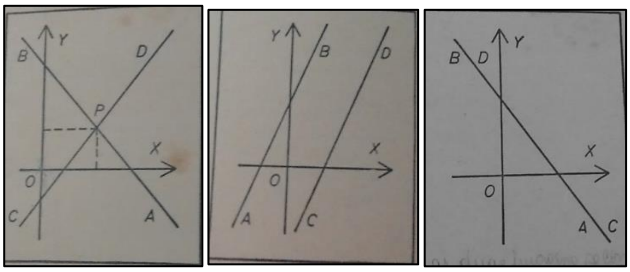
I. $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

II. $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} e \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$

III. $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} e \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$

Figura 13 – Representação gráfica

I. II. III.



Fonte: Maeder (1948, p.50-51)

Consideramos importante esse tipo de abordagem, principalmente porque, Trajano (1932), que foi analisado anteriormente, não desenvolve a resolução de um sistema com abordagem geométrica.

Em nossa análise, verificamos que, no livro de Maeder:

- Encontram-se sistemas estritamente algébricos;[7]
- Discussão de sistemas através de atribuição de variáveis;[8]
- Inserção de exercícios que necessitam de certos conhecimentos ou definições matemáticas, ou seja, é fundamental que o aluno saiba diferenciar as possíveis soluções para resolver um sistema.[9]

Todos os sistemas de equações neste livro ou possuem uma única solução ou infinitas soluções, não há sistemas sem solução. O autor até menciona esse caso no texto, porém, sem trazer atividades propostas.

Alguns exercícios/problemas do livro de Maeder:

[7] Considerar o exercício selecionado do livro de Maeder 1.
[8] Ver os exercícios do livro de Maeder 2 e 3.
[9] Ver os exercícios selecionados do livro de Maeder 2 e 3.

1.(MAEDER, 1948, p.41) exercício nº 34 - Resolver os seguintes sistemas:

$$\begin{cases}(a+c)x - by = bc \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{2x}{b}\end{cases}$$

$$R.\begin{cases}x = b \\ y = a\end{cases}$$

2.(MAEDER, 1948, p.47) exercício nº 1- Determinar os valores que se devem atribuir a m para que o sistema $\begin{cases}3x - 2y = 4 \\ 6x - my = 9\end{cases}$ admita uma única solução.

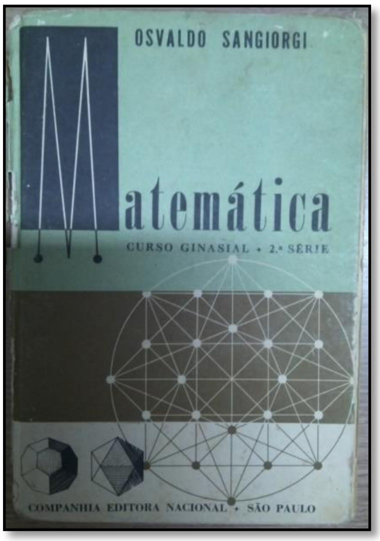
$R. m \neq 4$

3.(MAEDER, 1948, p.48) exercício nº 5 - Que valores se devem dar a m e n para que o sistema $\begin{cases}mx + ny = 5 \\ 3x - 2y = 1\end{cases}$ seja indeterminado?

4.(MAEDER, 1948, p.99) problema nº 18 - A soma de dois algarismos de um número é 9, e o quociente dêsse número pela soma dos seus algarismos é 7. Qual é o número? $R. 63$

4.3 Matemática Curso Ginasial 2ªSérie, de Osvaldo Sangiorgi (1959)

Figura 14 – Capa de Matemática Curso Ginasial – 2ª Série

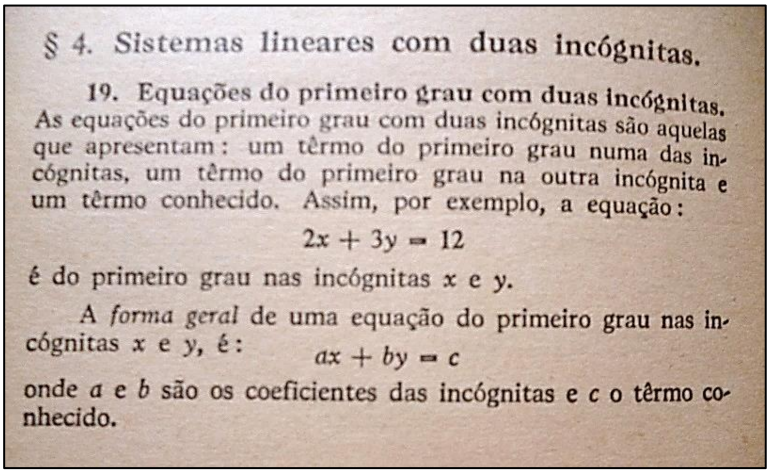


Fonte: Acervo de Célio Moacir dos Santos

Osvaldo Sangiorgi, nascido em 9 de maio de 1921, em São Paulo, professor de Matemática, autor de vários livros didáticos e, de acordo com Valente (2008), foi defensor e divulgador do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

Inicia-se o assunto de sistema de equações, sendo que, em uma primeira discussão, o autor aborda equações do primeiro grau com duas variáveis. Mais adiante, o autor trata das infinitas soluções de uma equação do primeiro grau com duas variáveis, atribuindo valores a x e encontrando valores correspondentes para y (figura 15).

Figura 15 - Equações lineares com duas incógnitas



§ 4. Sistemas lineares com duas incógnitas.

19. Equações do primeiro grau com duas incógnitas. As equações do primeiro grau com duas incógnitas são aquelas que apresentam: um têrmo do primeiro grau numa das incógnitas, um têrmo do primeiro grau na outra incógnita e um têrmo conhecido. Assim, por exemplo, a equação:

$$2x + 3y = 12$$

é do primeiro grau nas incógnitas x e y.

A *forma geral* de uma equação do primeiro grau nas incógnitas x e y, é:

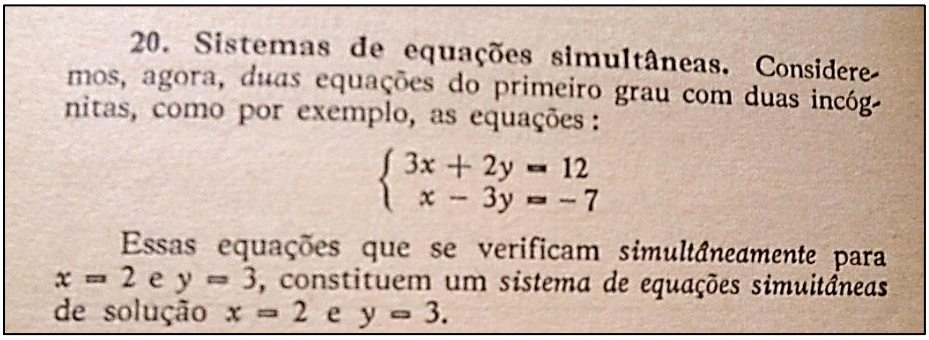
$$ax + by = c$$

onde a e b são os coeficientes das incógnitas e c o têrmo conhecido.

Fonte: Sangiorgi (1959, p. 140)

Depois de fazer as devidas considerações sobre equações de primeiro grau, há um exemplo de um sistema linear e sua respectiva solução. Atentamos para o fato de que, para um primeiro exemplo, a sua resolução não é feita de forma integral (figura 16).

Figura 16 – Sistemas de equações simultâneas



20. Sistemas de equações simultâneas. Consideremos, agora, *duas* equações do primeiro grau com duas incógnitas, como por exemplo, as equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

Essas equações que se verificam *simultâneamente* para $x = 2$ e $y = 3$, constituem um *sistema de equações simultâneas* de solução $x = 2$ e $y = 3$.

Fonte: Sangiorgi (1959, p.141)

No subitem *"Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas*" (SANGIORGI, 1959, p. 147), encontramos um sistema escrito de forma geral. Depois, através de manipulações algébricas e com a utilização do método da adição, chega-se a uma fórmula geral para a resolução de um sistema (figura 17). Destacamos que, as *fórmulas de resolução,* tratadas no livro, se assemelham com o resultado encontrado pela regra de Cramer, porém o livro não faz esse tipo de relação.

Figura 17 - Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas

22. Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas. Consideremos o sistema linear de duas equações com duas incógnitas, sob a *forma geral:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolvendo-se êsse sistema por qualquer um dos métodos, o da adição por exemplo, temos:

$$\begin{cases} ax + by = c & (\times a') \\ a'x + b'y = c' & (\times -a) \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = c & (\times -b') \\ a'x + b'y = c' & (\times b) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a'ax + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \end{cases} \qquad +\begin{cases} -b'ax - b'by = -b'c \\ ba'x + bb'y = bc' \end{cases}$$

$$(a'b - ab')y = a'c - ac' \qquad (a'b - ab')x = bc' - b'c$$

Supondo: $a'b - ab' \neq 0$, podemos tirar os valores de x e de y

$$\boxed{x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}} \qquad \boxed{y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}}$$

que são as *fórmulas de resolução* de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.

Fonte: Sangiorgi (1959, p.147)

O livro inclui duas formas de apresentar os exercícios, atividades inseridas ao final de cada item abordado teoricamente e atividades suplementares em uma parte específica do livro. Encontramos sistemas propostos para serem resolvidos por determinados métodos e problemas que são equacionados dando origem ao um sistema de equações, perfazendo um total de noventa e dois exercícios relacionados ao tema. Procuramos a partir daí, através de uma pequena amostra, levantar características importantes presentes nas atividades deste livro.

Em nossa análise, verificamos que, no livro de Sangiorgi:

- Aparece o termo *método da adição* ao invés do termo *método de redução ao mesmo coeficiente*;
- Existem, como exercícios propostos, aqueles que não possuem solução;[10]
- Comparecem problemas contextualizados e com a proposta de algebrizar as informações dadas transformando-as em um sistema;[11]
- Há quantidade significativa de exercícios/problemas.

[10] Ver exercício selecionado de Sangiorgi 2.
[11] Ver exercício selecionado de Sangiorgi 3, 4 e 5.

Alguns exercícios/problemas do livro de Sangiorgi:

1.(SANGIORGI, 1959, p.150) exercício nº2/1º - “Resolver os seguintes sistemas, pelo método da adição:”

$$\begin{cases} 6x + y = 8 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$x = 2\ e\ y = -4$$

2.(SANGIORGI, 1959, p.150) exercício nº5/2º - “Discutir os seguintes sistemas:”

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 8x - 6y = 13 \end{cases}$$

$$impossível$$

3.(SANGIORGI, 1959, p.189) problema nº 497 - “Uma pessoa comprou galinhas e coelhos num total de 48 cabeças e 130 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos comprou?”

$$31\ galinhas\ e\ 17\ coelhos$$

4.(SANGIORGI, 1959, p.156) problema nº 3 - “A soma de dois números é igual a 22 e a diferença é 6. Determinar esse dois números. Generalizar o problema.”
14 e 8

5.(SANGIORGI, 1959, p.157) problema nº 17 - “A soma de dois números é 324. Se dividirmos o maior por 15 e o outro por 12, os quocientes são iguais. Calcular os números.”

4.4 Matemática Segunda Série Ginasial, de Ary Quintella (1961)

Figura 18 – Capa Matemática 2ª Série Ginasial

Fonte: Acervo de Célio Moacir dos Santos

Ary Quintella foi um professor catedrático do Colégio Militar e professor do Ensino Técnico da Prefeitura do Rio de Janeiro. Como autor de livros didáticos, além de escrever para o ginasial, também se destacou com obras para os cursos clássico e científico, entre outras. De acordo com Pfromm Netto, Rosamilha e Dib (1974), os livros de Ary Quintella sempre foram marcados por possuir uma linguagem simples, com um grande número de exemplos que facilitavam a compreensão.

Quintella (1961) sustenta, em seu livro, primeiramente, uma discussão sobre equação com duas incógnitas, retratando as suas infinitas soluções, $5x + y = 16$. Em que atribui um valor qualquer para x e encontrando o seu correspondente em y. Quando o autor inicia o assunto sistemas, ele considera duas equações, $5x + y = 16 \;\; e \;\; 2x - 3y = 3$, depois, são atribuídos valores a $x \; e \; y$ para cada equação (figura 19).

Figura 19 - Soluções individuais das equações

No exemplo considerado, a primeira equação admite as *soluções:*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

e a segunda as soluções:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

Fonte: Quintella (1961, p. 158)

Apresentamos agora, a forma como o autor discute a solução do sistema. Essa discussão parte da análise de um sistema de equações geral com coeficientes $a, a', b, b' e \; c, c'$, sendo realizada algumas manipulações algébricas, seguindo do método da adição para a conclusão final (figura 20).

Figura 20 – Discussão de um sistema de forma algébrica

28. Discussão. *Os sistemas de duas equações com duas incógnitas*, podem, depois de eliminados os denominadores e feitas as transposições convenientes, ser reduzidos à forma:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \left| \begin{array}{c} b' \\ -b \end{array} \right| \begin{array}{c} -a' \\ a \end{array}$$

Resolvendo o tipo geral dos sistemas de duas incógnitas pelo processo da adição, obteremos:

$$\begin{array}{ll} ab'x + bb'y = cb' & -aa'x - ba'y = -ca' \\ \underline{-ba'x - bb'y = -bc'} & \underline{aa'x + ab'y = ac'} \\ (ab' - ba')x = cb' - bc' & (ab' - ba')y = ac' - ca' \end{array}$$

A possibilidade do sistema depende do valor do coeficiente $ab' - ba'$. Assim, podemos considerar dois casos.

Fonte: Quintella (1961, p.168)

O autor privilegia uma resolução e interpretação de um sistema de maneira algébrica, não retratando nenhuma outra abordagem. Ao se isolar x e y, encontramos o resultado semelhante ao da regra de Cramer.

Com relação aos exercícios/problemas, observamos uma primeira parte dos exercícios sobre o assunto sistema de equações, em um total de quarenta e seis e todos apresentam suas respectivas respostas. Na segunda parte das atividades, nos deparamos apenas com problemas, ou seja, o aluno para resolvê-lo, não pode simplesmente utilizar um método, aplicar as operações algébricas e encontrar a solução. Os problemas requerem antes, uma interpretação por parte do estudante, equacionando os dados e fazendo as devidas operações para que ele chegue a um resultado. No total, temos cinquenta problemas para serem resolvidos, todos com respostas para que o aluno compare seus resultados.

Selecionamos algumas atividades na tentativa de apresentarmos um pouco a proposta do livro de Quintella (1961).

Relacionamos também, as principais características percebidas nessa obra através desses exercícios e problemas.

- Nos enunciados, não se especificam métodos para a resolução, deixando a cargo do estudante, fazer a escolha do mesmo (substituição, adição ou comparação);
- Proposta de exercícios que trabalham a questão de conceitos e que exigem do aluno interpretações para se chegar à solução;[12]
- Presença de exercícios com a utilização de números decimais, fato que, até então, não foi observado nos outros livros analisados;
- Existência de exercícios cujas soluções são indeterminadas ou o sistema é impossível, (característica importante, pois, em geral, os autores analisados enfocam sistemas de equações lineares que possuem uma única solução);
- Exercícios de cunho geométrico, característica até então não muito comum nos livros analisados.[13]

Alguns exercícios/problemas do livro de Quintella:

[12] Ver exercício selecionado do livro de Quintella 2.
[13] Ver exercício selecionado do livro de Quintella 3 e 4.

1.(QUINTELLA, 1961, p. 173) exercício - Resolver os sistemas:

28. $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}5y = 0{,}35 \\ 3{,}1x - 2y = 2{,}1 \end{cases}$ $Resp.: x = 1 \; e \; y = 0{,}5$

42. $\begin{cases} 3x - 6x = 15 \\ 4x - 8x = 18 \end{cases}$ $Resp.: Impossível$

43. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ $Resp.: Indeterminado$

2.(QUINTELLA, 1961, p. 174) exercício nº 45 - Determinar o valor de m no sistema

$\begin{cases} 4x + my = 14 \\ mx + 9y = 21 \end{cases}$

de modo que:

1º) O sistema seja indeterminado.

2º) O sistema seja impossível.

$Resp.: \; m = 6 \; e \; m = -6$

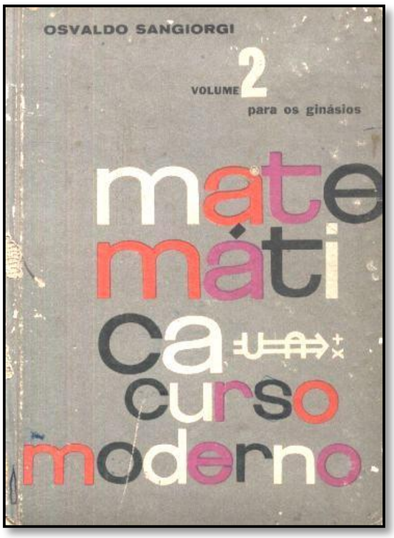
3.(QUINTELLA, 1961, p. 183) problema nº 1 - "Achar os lados de um paralelogramo cujo perímetro vale 21 m, sendo o lado maior o dobro do menor."

$Resp.: \; 7 \; e \; 3{,}5$

4.(QUINTELLA, 1961, p. 184) problema nº 16 - "A base de um retângulo é 6 metros maior e a altura 3 metros menor que o lado do quadrado da mesma área. Determinar o lado e a área do quadrado."

4.5 Matemática Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi (1965)

Figura 21 – Capa de Matemática Curso Moderno – Volume 2



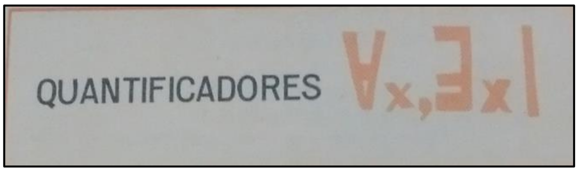
Fonte: Acervo de Célio Moacir dos Santos

Para dar uma maior legitimidade a nossa pesquisa, procuramos investigar outro livro, inserido dentro do período da Matemática Moderna. Selecionamos o livro de Osvaldo Sangiorgi, por ser adotado em diversas escolas no país. Nossa expectativa era a possibilidade de elencar novos aspectos, caso existissem, referentes à sua edição anterior, de 1959, já tratada anteriormente.

Para a eleição deste autor, nos fundamentamos em Valente (2008) que trata da importância de Sangiorgi, como um dos grandes divulgadores do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

Como, neste livro, Osvaldo Sangiorgi tem uma abordagem voltada para os princípios da Matemática Moderna, há uma grande utilização de simbologia, focalizando os quantificadores ($\forall$, V, $\exists$, $\nexists$), inclusive temos um capítulo do livro dedicado a essas notações (figura 22).

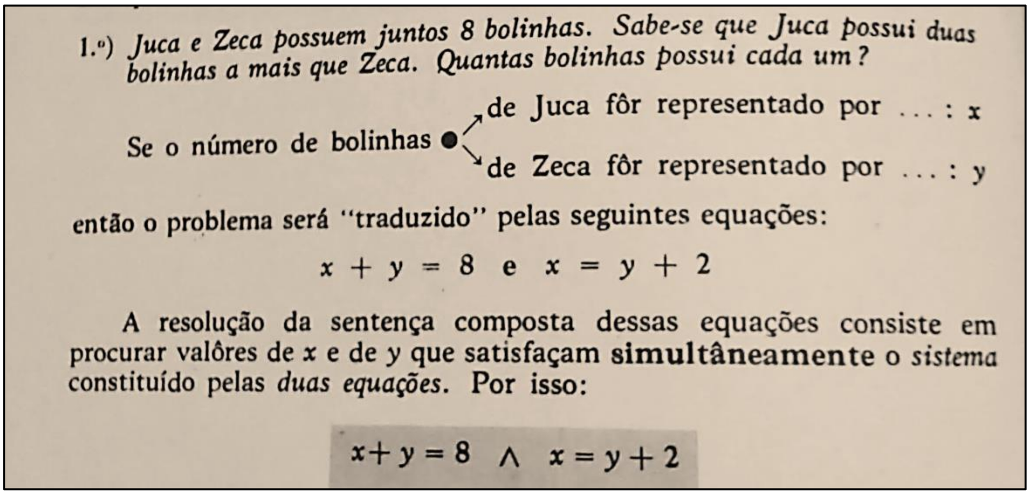
Figura 22 – Um dos capítulos do livro



Fonte: Sangiorgi (1965, p.210)

Na introdução do capítulo sobre sistemas de equações o autor inicia a discussão com um problema (figura 23).

Figura 23 – Introdução do assunto sistema de equações



1.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui duas bolinhas a mais que Zeca. Quantas bolinhas possui cada um?*

Se o número de bolinhas ● ↗ de Juca fôr representado por ... : x
↘ de Zeca fôr representado por ... : y

então o problema será "traduzido" pelas seguintes equações:

$$x + y = 8 \quad \text{e} \quad x = y + 2$$

A resolução da sentença composta dessas equações consiste em procurar valôres de x e de y que satisfaçam **simultâneamente** o *sistema* constituído pelas *duas equações*. Por isso:

$$x + y = 8 \ \wedge \ x = y + 2$$

Fonte: Sangiorgi (1965, p.242)

Cada equação é determinada por um conjunto verdade (V_1 *e* V_2) e a solução (V) é a interseção das duas equações.

Sendo $V_1: x + y = 8$ e $V_2: x = y + 2$

$Solução: V = V_1 \cap V_2$

Figura 24 – Forma de resolução sistema de equações

Como: $V = V_1 \cap V_2$, vem:

$V = [(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), \ldots] \cap [(2,0), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \ldots]$

ou $V = [(5,3)]$

Portanto: a *solução* do sistema proposto é o par: (5,3), e a resposta é: Juca tem 5 bolinhas e Zeca, 3.

Prova: n.º de bolinhas de Juca: 5
n.º de bolinhas de Zeca: 3 — diferença: 2 (Juca tem a mais)
soma: 8

Fonte: Sangiorgi (1965, p.244)

Vejamos outro exemplo de como o autor encontra o resultado de um sistema de duas equações (figura 25).

Figura 25 – Discussão de um sistema usando teoria de conjuntos

2.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui o triplo das bolinhas de Zeca. Quantas possui cada um?*

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = 3y$$

cujas equações traduzem *duas condições* **distintas** e **compatíveis.** Como:

$V_1 = [(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), \ldots]$

e $V_2 = [(0,0), (3,1), (6,2), (9,3), \ldots]$

temos: $V = V_1 \cap V_2 = [(6,2)]$

Sendo (6,2) o *único par*, segue-se que: Juca possui 6 bolinhas e Zeca, 2.

Porém, se fôssem enunciados os seguintes problemas:

Fonte: Sangiorgi (1965, p. 245)

Notamos que o autor utiliza pares ordenados, que representam as possíveis soluções de cada equação separadamente, sendo que, ao final, o autor faz uma interseção entre os resultados para descobrir a solução comum, denotando assim, uma nova maneira de resolver o sistema.

Ao todo, no segundo volume da Matemática Curso Moderno, encontram-se quarenta e cinco exercícios e problemas. Sangiorgi (1965) subdivide as suas atividades em dois grupos, a primeira, apenas de trinta exercícios e, depois, em um segundo grupo, temos quinze problemas.

Traremos uma representatividade dos exercícios/problemas dispostos nesse livro, bem como procuraremos encontrar elementos que nos remetam aos ideais do movimento da apregoada "modernidade" da Matemática.

- Desenvolvimento e utilização de uma linguagem dentro da teoria conjuntos;
- Preocupação por parte do autor em trabalhar com problemas contextualizados para que o estudante possa resolver usando sistemas;[14]
- A ênfase e direcionamento se encontram unicamente na técnica de substituição em detrimento das demais, com cinco páginas dedicadas integralmente a esse método e grande quantidade de exercícios;
- Uso de simbologias;
- Existência de algumas sugestões para a resolução dos problemas, que direcionam o equacionamento;[15]
- O número de exercícios em relação à edição anterior foi bastante reduzido.

Alguns exercícios/problemas do livro de Sangiorgi:

1.(SANGIORGI, 1966, p.247) problema nº 1/1º - Resolver os seguintes problemas por intermédio de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis: Dorotéia e Sílvia possuem juntas 6 bonecas. Sabe-se que Sílvia possui duas bonecas a mais que Dorotéia. Quantas bonecas possui cada uma?

2.(SANGIORGI, 1966, p.252, grifo do autor) exercício nº 1/1º e 8º - Resolver os seguintes sistemas simultâneos de duas equações do primeiro grau com duas variáveis, usando a *técnica de Substituição de Variáveis.*

1º) $x + y = 10 \quad \wedge \quad x = y + 6$

8º) $x = 3(y - 1) \quad \wedge \quad x = \frac{y+14}{2}$ (Sugestão: basta igualar os valores de x ...)

3.(SANGIORGI, 1966, p.252,) exercício nº 2/7º - "Discutir os sistemas."

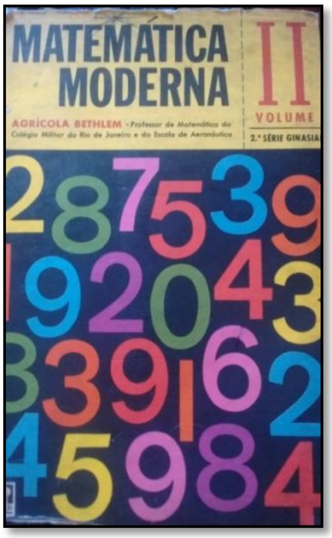
7º) $\begin{cases} a + b = 8 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 4 \end{cases}$

4.(SANGIORGI, 1966, p.253) problema nº 6 - A soma das idades de dois alunos é 20. Daqui 3 anos o mais velho terá 6 anos mais que o mais môço. Qual a idade atual de ambos?
Sugestão: Representando a idade de um dos alunos por... x
e a idade do outro por ...y
temos: $x + y = 20$ (1ª equação do sistema)
Como daqui a 3 anos, um será : $x + 3$ e o outro : $y + 3$, a 2ª equação do sistema, relativa à segunda parte do problema, será: $x + 3 = 6 + (y + 3)$
resolver o sistema...
$Resp.:\ 6m\ e\ 36m^2$

[14] Ver exercício selecionado do livro de Sangiorgi 1.
[15] Ver exercício selecionado do livro de Sangiorgi 2 e 4.

4.6 Matemática Moderna, de Agrícola Bethlem (1969)

Figura 26 – Capa Matemática Moderna Volume II



Fonte: Acervo de Célio Moacir dos Santos

O tenente coronel Agrícola Bethlem se graduou engenheiro e bacharel em Matemática e Ciências Físicas, foi, durante muitos anos, professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro.

O capítulo VI vem ao encontro do nosso tema, sistema de equações, iniciando o assunto com uma discussão sobre equações, com utilização de exemplos. Muitos dos livros anteriores analisados também o fazem, ou seja, o assunto sistema, continuamente vem antecedido pelo tópico de equações. Porém, Bethlem (1969) o faz de maneira diferente em relação aos livros verificados. Primeiramente, pela sua abordagem, com a utilização da linguagem de conjuntos que, como já dissemos, são características dessa época. Termos como, conjunto universo e conjunto verdade, aparecem regularmente.

No caso da equação representada de forma geral, $ax + b = 0$, é detalhada uma discussão, com levantamento de hipóteses relacionado aos coeficientes $a\ e\ b$. E, nessa questão, são feitas conclusões associadas com os resultados que essa equação pode ter, dependendo dos valores atribuídos aos coeficientes $a\ e\ b$. Sendo que, de maneira geral, com $a \neq 0$, o conjunto verdade é sempre $V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Primeira hipótese: $a = 0\ e\ b \neq 0$.

Figura 27 – Primeira hipótese

Primeira hipótese: $a = 0$ e $b \neq 0$.

Tem-se: $0 . x = b$

Não há nenhum número racional que substituído por x, torne essa sentença aberta verdadeira porque o produto de qualquer número racional por zero é zero.

O conjunto — verdade, $V = \{\ \}$ ou $V = \varnothing$. Não há solução.

Diz-se que a equação é impossível.

Segunda hipótese: $a = 0$ e $b = 0$

Fonte: Bethlem (1969, p.128)

Segunda hipótese: $a = 0\ e\ b = 0$.

Figura 28 – Segunda hipótese

Segunda hipótese: $a = 0$ e $b = 0$

Tem-se: $0x = 0$.

Qualquer número racional que substituír x, torna a sentença aberta verdadeira.

O conjunto — verdade é $V = Q_R$.

Fonte: Bethlem (1969, p.128)

Há uma observação feita por Bethlem (1969) na qual é mencionado o símbolo $\forall x$ e $\exists x$. O autor também propõe um exercício para que o estudante possa usar os quantificadores (figura 29).

Figura 29 – Quantificador universal

OBSERVAÇÕES:

1) O símbolo $\forall$ é um *quantificador universal*, quer dizer qualquer que seja. Assim $\forall x$ quer dizer qualquer que seja x.

2) O símbolo $\exists$ é um quantificador existencial, quer dizer existe, pelo menos, um tal que.

Assim $\exists x$ quer dizer existe pelo menos um x, tal que.

Como exercício faça a discussão da equação $ax + b = 0$, $a, b \in Q_R$, conjunto universo.

Utilizando-se dos quantificadores.

Fonte: Bethlem (1969, p.129)

Depois no terceiro item, com o título “Equações simultâneas do primeiro grau com duas indeterminadas” temos um problema com os seguintes dizeres:

> "*Ernani entrou em uma loja e comprou três camisas de mesmo preço unitário e duas gravata, também de mesmo preço unitário, tudo por NCr$ 62,00. Qual era o preço de uma camisa e qual era o preço de uma gravata*?" (BETHLEM, 1969, p.130).

A equação que representa essa sentença é $3x + 2y = 62$ e que segundo o autor esse tipo de problema, comporta mais de uma solução, dizendo que a solução é *indeterminada*.

Temos, então, o conjunto verdade $V = \{\ldots (2{,}28), (4{,}25), (6{,}22), \ldots\}$.

Agora, se a esse problema for acrescentado mais uma condição como, por exemplo, "o preço da gravata adicionado ao de uma camisa é igual a NCr$23,50" (BETHLEM, 1969, p.132), teríamos o seguinte solução (figura 30):

Figura 30 – Solução do problema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 62 \\ x + y = 23{,}5 \end{cases}$$

Sejam V_1, o conjunto verdade da primeira e V_2, o conjunto verdade da segunda. O conjunto verdade das duas sentenças, isto é, o conjunto de pares ordenados que tornam simultâneamente *verdadeiras* as duas sentenças é

$$V = V_1 \cap V_2$$

A interseção dêsses dois conjuntos verdade é

$\{(15;\ 8{,}5)\}$, obtido por tentativas.

A solução do sistema é o par ordenado (15; 8, 5) e a solução do problema é:

preço de uma camisa → NCr$ 15,00
preço de uma gravata → NCr$ 8,50

Fonte: Bethlem (1969, p.132)

No livro, encontramos outras particularidades que, entendemos ser importantes para caracterizar o material e a época de inserção do mesmo durante o MMM. É adotado o conjunto dos números racionais como conjunto universo para as possíveis soluções da equação. São atribuídos valores para a variável x e encontrados valores correspondentes para y. Nesse caso, a ideia de infinidade de soluções é mencionada e lhe é conferida uma representação utilizando a linguagem de conjuntos para expressar essas quantidades infinitas.

Figura 31 – Representação de todos os pares ordenados

A impossibilidade de escrever todos os pares ordenados que constituem o conjunto verdade leva a escrevê-lo por compreensão:

$$V = \{(x,\ y),\ x \in Q_+,\ y \in Q_+ \mid y = 31 - \frac{3}{2}x\}$$

Fonte: Bethlem (1969, p.132)

Há, também, um exemplo de um exercício resolvido em que o sistema não possui solução, ou seja, o conjunto verdade da solução é vazio (figura 32).

Figura 32 – Representação de um sistema sem solução

2) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases} \quad \text{(conjunto universo } Q_R \times Q_R\text{)}$$

As equações são incompatíveis. Não há par ordenado que torne as sentenças *abertas* verdadeiras.

O conjunto-verdade, V, do sistema, é vazio.

$$V = \varnothing$$

Os primeiros membros dessas equações diferem pelo fator $2 \left(\frac{1}{2}\right)$, mas os segundos membros, não.

Construa o *grafo* do sistema e observe que

$$V = \{\ \} = \varnothing$$

Fonte: Bethlem (1969, p.141)

O autor discorre sobre a incompatibilidade entre as equações, trazendo uma simbologia para exemplificar essa situação e, ao final, ainda pede ao estudante que represente o exercício em forma de *grafo*.

Bethlem (1969) vem com uma proposta diferenciada para os exercícios a resolver. Ao final do capítulo do tópico sobre sistema de equações, são evidenciados dois momentos: o primeiro, com dez exercícios, sem suas respectivas respostas e, um segundo, com mais dez problemas, para os quais alguns apresentam respostas, outros não.

Apresentamos algumas dessas atividades, trazendo os principais atributos que caracterizamos na nossa análise dos exercícios e problemas:

- Os enunciados já trazem uma mudança na maneira como as atividades devem ser conduzidas;
- Existe a presença de outra forma de visualização para a resolução de sistemas, o gráfico, que, no livro, o autor denomina “*grafo*”;[16]
- Utilização da linguagem de conjuntos;
- Emprego de simbologia;
- Problemas que envolvem geometria;[17]
- Interpretações que vão além do simples fato de uma resolução em si, há uma proposta de uma investigação do problema.[18]

[16] Ver exercício selecionado do livro de Bethlem 1.
[17] Ver exercício selecionado do livro de Bethlem 3.
[18] Ver exercício selecionado do livro de Bethlem 4.

Alguns exercícios/problemas do livro de Bethlem:

1.(BETHLEM, 1969, p. 142) exercício nº 2 - Diga, sem resolver, se os sistemas de equações lineares seguintes, têm uma solução, uma infinidade de soluções ou não têm solução. Aponte em cada caso o conjunto-verdade e represente o *grafo*:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases} \qquad (conjunto\ universo\ Q_R \times Q_R\ ou\ {Q^2}_R)$$

2.(BETHLEM, 1969, p. 142-143) problema nº 6 - Resolver os seguintes problemas utilizando sistemas de equações lineares com duas indeterminadas:
No produto $p = xy, x < y,\ \ x, y \in I$ somando-se 26 unidades ao maior e subtraindo 26 do menor o produto não se altera. Achar $x\ e\ y$ sabendo que sua soma é 100.

$$Resp.: 37{,}63$$

3.(BETHLEM, 1969, p. 143) problema nº 7 - A altura de um retângulo, expressa em metros, é o dobro da base. Achar as dimensões do retângulo sabendo que o perímetro é igual a 18m.

4.(BETHLEM, 1969, p. 143) problema nº 9 - Atualmente a soma das idades de Renato e de João é de 22 anos. Há cinco anos passados Renato era 2 anos mais velho que João. Qual é, atualmente, a idade de Renato? $Resp$: 12
Observação: Explique e justifique porque o número 5 não teve influência no problema. Podia ser 7 ou outro número inteiro.

5. UMA ANÁLISE GLOBAL

No modelo tradicional de ensino, em que se apoiavam as escolas no século XIX, a caracterização principal era a memorização, ou seja, um bom aluno era aquele que conseguisse reter um número maior de informações. Em contrapartida, surgem propostas de reformulação para esse modelo que já não mais atendiam aos anseios da sociedade.

Procuramos fazer uma síntese, trazendo alguns elementos que marcaram o ensino no Brasil, desde o final do século XIX, chegando a segunda metade do século XX. Novas tendências pedagógicas, como o Método Intuitivo e a Escola Nova, surgiram como propostas renovadoras se contrapondo às concepções tradicionais. Reformas educacionais se fizerem presentes, como a de Francisco Campos e a de Gustavo Capanema, impondo mudanças na maneira de ensinar a Matemática. Posteriormente, temos o Movimento da Matemática Moderna, que influenciou grandemente os nossos educadores matemáticos. Do outro lado, temos os livros didáticos, servindo de apoio e orientação para os professores e que, em meio a esse contexto educacional, vivenciado nesses periodos, de alguma maneira, se modifica.

Consequentemente, procuramos observar, se de alguma forma ao longo desse período, essas propostas diferenciadas se manifestaram na organização do conteúdo de sistemas de equações lineares. Deixamos claro que não fizemos uma análise geral dos livros e, sim, apenas do tópico em questão. Deste modo, admitimos que nossa visão é parcial e não pode ser generalizada na perspectiva de cada autor das obras analisadas.

Em se tratando da Escola Nova, abriremos uma pequena discussão sobre a suas interferências na educação no Brasil.

Zuin (2016a), em um dos seus estudos, trata de dois autores que questionam se realmente o escolanovismo era praticado aqui no país, enfocando que “é preciso ter um olhar cuidadoso para as correntes pedagógicas e a apropriação das mesmas pelos autores de textos destinados aos professores em sua formação inicial ou em serviço” (p. 2). Realmente, ao direcionarmos nosso olhar para os sistemas, não percebemos influências substanciais nos livros didáticos. Para essa corrente pedagógica, os exercícios, por exemplo, deveriam seguir um caráter investigativo, porém, isso não ocorre nos materiais pesquisados.

Em se tratando do livro de Trajano, podemos encontrar alguns elementos do método intuitivo, o que é comprovado pela preocupação que o autor tinha com os problemas. Atentamos para o fato de o conteúdo sistemas ser acompanhado de vários problemas resolvidos, muito provavelmente, com o intuito de proporcionar ao estudante uma melhor compreensão nas resoluções para que ele pudesse realizar, em sequência, as atividades propostas. Zuin (2011), ao analisar o livro *Arithmetica Illustrada*, de Trajano, indica que o autor demostrava uma grande preocupação com a resolução de problemas e que, nesse contexto pedagógico, encontram-se elementos dos princípios do método intuitivo. Da mesma forma, podemos fazer essa inferência em relação ao livro *Álgebra Elementar*. A mesma autora ainda traz que, "por ser um pastor protestante e atuar como docente das escolas da Igreja Presbiteriana do Rio de Janeiro e de São Paulo e na Escola Americana de São Paulo, Trajano teria contato com publicações e educadores estadunidenses" (p.11). Todas essas proximidades com livros de autores americanos, que por sua vez, eram adeptos do Método Intuitivo, teriam influenciado Antonio Trajano a escrever seus materiais.

Para o livro de Maeder (1948) averiguamos que apresenta uma linguagem que não disfarça seu formalismo. Seguinte a essa situação, destacamos a presença, mesmo que concisa, da menção à geometria atrelada aos sistemas lineares. Nesses termos, o autor se encontra em conformidade com o Programa de Matemática da Portaria Ministerial nº 170, de 11 de julho de 1942, que prescreve a resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas, bem como, a sua interpretação gráfica, discussão e solução (VECHIA; LORENZ, 1998).

Nos livros de Sangiorgi (1959) e Quintella (1961), percebemos que seus conteúdos seguem a Portaria 1.045, de 14 de dezembro de 1951, em que expedia os planos de desenvolvimento dos chamados "*Programas Mínimos*" de ensino secundário e respectivas instruções metodológicas. Nesses programas não há a inclusão da parte gráfica para o conteúdo de sistemas, porém, ao analisarmos as instruções metodológicas oriundas da Portaria, encontramos propostas diferentes entre o documento e os livros didáticos. Segundo as instruções, "o exercício e o exemplo deverão acompanhar a explanação da matéria, entremeando-se com a sua exposição..." (BRASIL, 1951, p.9). Contudo, os exercícios, nos livros de Sangiorgi (1959) e Quintella (1961), estão sempre dispostos ao final das exposições teóricas.

Nos livros de Sangiorgi (1965) e Bethlem (1969), é bastante perceptível uma mudança na maneira como os autores abordam o assunto de sistemas lineares. Foi atribuída, a esse tema, uma estruturação algébrica carregada de simbolismos, com excessiva abstração e uma ênfase na teoria dos conjuntos.

Outras análises foram levantadas e características importantes verificadas na pesquisa. Uma delas é que, os exercícios, em sua grande maioria, eram resolvidos por meio da utilização da Álgebra. Dos seis livros envolvidos na investigação, constata-se que, apenas dois deles traziam, em suas resoluções, o método geométrico, ou seja, Maeder (1948) e Bethlem (1969).

Inferimos que, o fato de quatro dos autores analisados não trazer a resolução algébrica acompanhada da resolução gráfica, poderia ser prejudicial aos estudantes. Entendemos que, a abordagem geométrica pode propiciar ao aluno uma visão diferenciada e, sobretudo, ajudá-los a entender as diferentes respostas, fortalecendo a noção conceitual da solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Quadro 2 - Apresentação das resoluções

Autores	**Apresentação das resoluções com utilização de exemplos ou exercícios/problemas**	
	Algébricas	**Geométricas**
Trajano (1932)	X	-
Maeder (1948)	X	X
Sangiorgi (1959)	X	-
Quintella (1961)	X	-
Sangiorgi (1965)	X	-
Bethlem (1969)	X	X

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com as observações feitas, não encontramos a mesma proporção entre os dois tratamentos, o algébrico e o geométrico (quadro 2). Julgamos que, tanto a abordagem algébrica, quanto a gráfica de um problema que envolve sistemas, pode oferecer uma condição maior de compreensão, pois temos dois caminhos distintos com o objetivo único, a resolução do problema ou do exercício.

Outro quadro importante, que iremos apresentar, é sobre como os autores introduzem o conteúdo de sistemas (definições, exercícios, problemas e abordagem histórica). Averiguamos que, geralmente, esse início é feito através de definições, exercícios ou problemas. Em nenhum dos autores encontramos uma abordagem história do conteúdo. (quadro 3).

Quadro 3 – Introdução do conteúdo

Autores	**Introdução do conteúdo Sistema de Equações**			
	Definições	**Exercícios**	**Problemas**	**Abordagem histórica**
Trajano (1932)	X	X	-	-
Maeder (1948)	X	X	-	-
Sangiorgi (1959)	X	X	-	-
Quintella (1961)	X	X	-	-
Sangiorgi (1965)	X	-	X	-
Bethlem (1969)	-	-	X	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Com relação aos métodos de resolução de um sistema de equações, houve certa continuidade, a menção de três métodos (adição, substituição e comparação). A ruptura de dá a partir do livro de Sangiorgi (1965) no qual comparece apenas um método (quadro 4).

Durante o período da Matemática Moderna, verificamos que Sangiorgi (1965) e Bethlem (1969) optaram por utilizar apenas um dos métodos, sendo que Sangiorgi (1965) dava um grande destaque ao método de substituição.

Quadro 4 – Métodos de resolução

Autores	**Métodos de Resolução (com ou sem menção explícita)**			**Regra de Cramer**		
	Adição	**Substituição**	**Comparação**	**Fórmulas que se assemelham com o resultado proposto por "Cramer"**	**Menciona com a utilização do nome "Cramer"**	**Não menciona**
Trajano (1932)	X	X	X	-	-	X
Maeder (1948)	X	X	X	X	-	-
Sangiorgi (1959)	X	X	X	X	-	-
Quintella (1961)	X	X	X	X	-	-
Sangiorgi (1965)	-	X	-	-	X	-
Bethlem (1969)	-	-	X	-	-	X

Fonte: Elaborado pelo autor

É imprescindível ressaltarmos que o conteúdo de sistema de equações lineares com duas incógnitas, permaneceu nos livros didáticos. Considerando todas as transformações ocorridas, no período analisado, às reformas Francisco Campos e Capanema, o Movimento da Matemática Moderna, todas as leis, decretos ou portarias, em nenhum momento, esse conteúdo desaparece. Ocorrem modificações concernentes aos métodos de resolução, inclusão ou não da resolução gráfica e a forma metodológica de apresentar este conteúdo, refletindo igualmente nos exercícios e problemas. A alteração mais significativa fica restrita aos livros cujos autores seguiram princípios do MMM.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Fernando de. **A transmissão da cultura.** 5.ed. São Paulo: Melhoramentos. 1976.

BAUMGART, John K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** Trad. Hygino Hugueros Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BETHLEM, Agrícola. **Matemática Moderna**. 2ª série. Rio de Janeiro: Record, 1969.

BÉZOUT, Étiènne. **Théorie générale des équations algébriques**. Paris: De I'mprimerie de Ph. D. Pierres, 1779.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Trad. Elza Furtado Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

BRASIL. Lei no 4.024, de 20 de dezembro de 1961 Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, Distrito Federal, 27 dez. 1961.

BRASIL. Portaria Ministerial n. de 1045, de 14 de dezembro de 1951. Expede os planos dos programas mínimos de ensino secundário e respectivas instruções metodológicas. **Diário Oficial da União,** Rio de Janeiro, n. 45, 22 fev. 1952, p. 2-20. Disponível em: < http://www.jusbrasil.com.br/ diarios/2375335/pg-67-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-22-02-1952/pdfView>. Acesso em: 11 nov. 2016.

BRASIL. Portaria Ministerial s/n de 30 de junho de 1931. Dispõe sobre os programas do curso fundamental do ensino secundário e instruções metodológicas. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, ano LXX, n. 178, p.12412, 30 jul. 1931.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 208 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989. Disponível em: <http:// hdl.handle.net/10183/5237> Acesso em 20 ago. 2016.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, 1990.

COLLETTE, Jean-Paul. **Historia de las matemáticas**. Traducción Pilar González Gayoso. México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.

COULANGE, Lalina. **Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique.** Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième'. Education, Université de Grenoble. 2000.

FARIA FILHO, Luciano Mendes; VIDAL, Diana Gonçalves. Os tempos e os espaços escolares no processo de institucionalização da escola primária no Brasil. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, n. 14, p.19-34, 2000.

GIL, Paulo Eduardo Bastos. **François Viète:** o despertar da álgebra simbólica. 2001. 211f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Ciências – Universidade do Porto, Porto, 2001.

DORIER, Jean-Luc . **Contribution à l'Étude de l'Enseignement à l'Université des Premiers Concepts d'Algèbre Linéaire.** Approches Historique et Didactique. These de Doctorat de l'Université J. Fourier, France, Grenoble. 1990.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino Hugueros Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, São Paulo, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

LONGEN, Adilson. **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática.** 2007. 405 f. Tese (Doutorado) - Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

MAEDER, Algacy Munhoz. **Curso de Matemática**: 4ª série ginasial. 2 ed. São Paulo: Melhoramentos, 1948.

MARCHELLI, Paulo Sergio. Da LDB 4.024/61 ao debate contemporâneo sobre as bases curriculares nacionais. **Revista Científica e-Curriculum**, v. 12, n. 3, p. 1480-1511, 2014.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Angela. **História na educação matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, n. 1, p. 19-39, 1993.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 199-218.

PFROMM NETO, Samuel; DIB, Cláudio Zaki; ROSAMILHA, Nelson. **O livro na educação.** Rio de Janeiro: Primor/INL,1974. p. 153-204.

PINTO, Neuza Bertoni. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. **Diálogo Educacional**, v. 5, n. 16, p. 25-38, 2005.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática**: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

QUINTELLA, Ary. **Matemática segunda série ginasial**. 59. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1961.

REMER, Maísa Milènne Zarur; STENTZLER, Márcia Marlene. Método Intuitivo: Rui Barbosa e a preparação para a vida completa por meio da educação integral. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 9., 2009, Curitiba. **Anais** ... Curitiba: PUCPR, 2009.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 6, n. 3, p. 80-103, 2013.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática Curso Ginasial**. 2ª Série. 56. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática curso moderno**. 2. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

SAVIANI, Dermeval. **História das ideias pedagógicas no Brasil**. Campinas: Autores Associados, 2011.

SAVIANI, Dermeval. Trabalho e Educação: fundamentos ontológicos e históricos. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 29., 2006, Caxambu. **Anais**... Caxambu: ANPED, 2006.

SCHELBAUER, Analete Regina. **A constituição do método de ensino intuitivo na província de São Paulo (1870-1889).** Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SILVA, Marcelo Ataide; DA SILVA, Jonson Ney Dias. Movimento modernizador da matemática secundária nos livros didáticos de Stávale e Sangiorgi. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SIPEM, 2012.

SOARES, Flávia dos Santos. **Movimento da matemática moderna no Brasil** : avanço ou retrocesso? 2001. 192 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SOARES, Flávia dos Santos. A divulgação da matemática moderna na imprensa periódica. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Anais**... Porto, Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

SOUZA, Rosa Fátima. **Templos de civilização:** a implantação da escola primária graduada no Estado de São Paulo**,** 1890-1910. São Paulo: Fundação Editora UNESP, 1998.

STEPHANOU, Maria; BASTOS, Maria Helena Câmara. História, memória e história da educação. **Histórias e memórias da educação no Brasil**, v. 3, p. 417-428, 2005.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

TRAJANO, Antônio Bandeira. **Algebra elementar**. 15. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1932.

VALDEMARIN, Vera Teresa. Método Intuitivo: os sentidos como janelas e portas que se abrem para um mundo interpretado. In: SOUZA, Rosa Fátima de; VALDEMARIN, Vera Teresa; ALMEIDA, Jane Soares de. **O legado educacional do século XIX**. Araraquara: Unesp/Faculdade de Ciências e Letras, 1998. p. 63-105.

VALENTE, Wagner Rodrigues. O que é número? Produção, circulação e apropriação da Matemática Moderna para crianças. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.26, n.44, p.1417-1442, 2012.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Osvaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez. 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. 2. ed. São Paulo: Annablume, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **O nascimento da matemática do ginásio**. São Paulo: Annablume, 2004.

VECHIA, Ariclê; LORENZ, Michael. **Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira. (1850-1951)**. Curitiba: Ed. do Autor, 1998.

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar:** o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Escola Nova e o ensino de Aritmética: direcionamento para a capacitação e formação docente em revistas pedagógicas brasileiras. ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2016, São Mateus. **Anais...** São Mateus: UFES, 2016a.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Trabalhando com as medidas: orientações para o Ensino Primário pelas mãos de Irene de Albuquerque. In: SEMINÁRIO TEMÁTICO DO GHEMAT, 14., 2016, Natal, RN. **Saberes elementares matemáticos do Ensino Primário (1890-1970): sobre o que tratam os Manuais Escolares?** Natal: UFRN, 2016b.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Sistema métrico decimal em um best seller de António Trajano. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2011, Recife, PE. **Anais...** (CD-ROM). Recife: UFPE / CIAEM, 2011. 1v.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. O ensino de Geometria e Desenho na Reforma do ensino primário de Minas Gerais em 1906. In: LOPES, Ana Amélia Borges de Magalhães; GONÇALVES, Irlen Antônio; FARIA FILHO, Luciano Mendes de; XAVIER, Maria do Carmo (Orgs.). **História da Educação em Minas Gerais.** Belo Horizonte: FCH/FUMEC, 2002, p. 427-439.