



**PUC Minas**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Paulo Cezar Monteiro Tavares

**ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DE UM APLICATIVO PARA  
*ANDROID***

Belo Horizonte  
2017



Paulo Cezar Monteiro Tavares

**ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DE UM APLICATIVO PARA  
*ANDROID***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

**Orientadora:** Profa. Dra. Tânia Fernandes Bogutchi

Belo Horizonte  
2017



*Página destinada à ficha catalográfica*





**PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**PAULO CEZAR MONTEIRO TAVARES**

Dissertação defendida e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Tânia Fernandes Bogutchi – Orientadora – (PUC Minas)  
Doutorado em Tratamento da Informação Espacial – (PUC Minas)

Prof. Dr. Ronan Daré Tocafundo – (IFMG/Congonhas)  
Doutorado em Educação – (UFMG)

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eliane Scheid Gazire – (PUC Minas)  
Doutorado em Educação – (UNICAMP)

Belo Horizonte, 07 de julho de 2017.





*Este trabalho é dedicado à minha querida esposa,  
e à minha linda e amada filha.*



## AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte da minha vida e de toda sabedoria. Sem Ele seria impossível desenvolver este trabalho. A Ele toda honra, toda glória e toda minha gratidão.

Aos queridos professores e à coordenação do Programa de Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática da PUC/MG, especialmente à professora Dra. Tânia Fernandes Bogutchi, por todo carinho e apoio na orientação.

À minha querida esposa Maressa, companheira de todas as horas e grande incentivadora. Obrigado por caminhar e orar comigo, sempre acreditando que esse sonho era possível. Agradeço o carinho e as palavras de incentivo, principalmente quando o cansaço se fez presente!

À minha querida família: irmã Soraya, cunhados, primos, tios, sobrinhos e avós e de um modo especial aos meus pais Paulo Cezar (in memorian) e Silvia, grandes exemplos de vida, os quais sempre acreditaram que o conhecimento muda o mundo e nunca mediram esforços para que eu tivesse acesso a uma educação de qualidade; ao Anderson e Julieta, meus "segundos pais", pelo abrigo e acolhimento, pelos conselhos e pelas orações dispensadas a meu favor; aos meus cunhados Filipe e Priscila e à minha "tia" Nilzete, pelo carinho, abrigo e suporte técnico para que eu pudesse desenvolver esse projeto de pesquisa. À minha cunhada Débora por sugerir o nome do aplicativo, depois de muitas reflexões em tardes de muita prosa e de boas risadas.

Aos meus grandes amigos Genildo, Cynthia, Jéssica, Rafael Novais, Bruno, Natália, Marcos, Rafael Cazal e Nelson. Vocês também fazem parte dessa história e têm um lugar muito especial na minha vida!

Aos alunos de Sistemas de Informação e Engenharia da Computação da Universidade Federal de Ouro Preto: Davidson, Maria Luísa, Aline, Camila e Dasayeve. O embasamento teórico e o suporte técnico dispensados para a criação do aplicativo foram essenciais para o êxito do projeto.

À Escola Educação Criativa: coordenação, professores de matemática, professores e grandes amigos Valéria e Francisvaldo e a todos os alunos do segundo ano do Ensino Médio de 2016. Vocês fizeram parte ativamente de todo o processo de pesquisa! Obrigado pela atenção e paciência e por contribuírem significativamente para que a pesquisa fosse realizada!

Às professoras Dra. Marinês e Dra. Simone, por todo incentivo e pelos conselhos durante a minha vida acadêmica.



Aos queridos colegas da turma 11 do mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Obrigado pela amizade, pela convivência e pelos momentos de aprendizado que compartilhamos!

Com certeza essa conquista não é somente minha. A todos que participaram de alguma forma, muito obrigado!



## RESUMO

O ensino da Análise Combinatória nas escolas brasileiras, no início do século XXI, baseia-se geralmente apenas na utilização de fórmulas matemáticas, podendo, dessa maneira, prejudicar o aprendizado do aluno. Diante desse quadro, o presente trabalho se dispõe a propor uma estratégia didática que possa contribuir para o ensino desse conteúdo. O objetivo da pesquisa foi o desenvolvimento de um aplicativo para *smartphone*, utilizando a plataforma *Android Studio* na criação de um jogo para o ensino de Análise Combinatória na Educação Básica. Para isso, foi desenvolvida uma pesquisa-ação em conformidade com a revisão bibliográfica realizada. O uso deste aplicativo tem como suporte uma sequência didática elaborada com desafios que envolvem problemas de contagem, atraindo, assim, a atenção os alunos e favorecendo o processo de construção do seu conhecimento. Esse fato pode ser constatado por meio do questionário que os alunos responderam ao final da pesquisa. O jogo foi aplicado nos alunos do segundo ano do ensino médio da Escola Educação Criativa, localizada no município de Ipatinga, MG. Por meio deste estudo foi possível verificar que novas metodologias de ensino aliadas ao uso de tecnologias, podem contribuir para o ensino de Matemática, especialmente para o de Análise Combinatória.

**Palavras-chave:** Análise Combinatória. Jogos. Tecnologia no ensino.





## **ABSTRACT**

The teaching of Combinatorial Analysis in Brazilian schools, at the beginning of the 21st century, is generally based only on the use of mathematical formulas, which may, in this way, hinder students' apprehension. In view of this framework, the present work sets out to propose a didactic strategy that can contribute to the teaching of this content. The objective of the research was the development of a smartphone application, using the Android Studio platform in the creation of a game for teaching Combinatorial Analysis in Basic Education. For this, an action research was developed in accordance with the literature review. The use of this application is supported by a didactic sequence elaborated with challenges that involve counting problems, thus attracting students attention and favoring the process of building their knowledge. This fact can be verified through the questionnaire that the students answered at the end of the research. The game was applied to the students of the second year of high school at Escola Educação Criativa, located in the municipality of Ipatinga, MG. Through this study it was possible to verify that new teaching methodologies combined with the use of technologies can contribute to the teaching of Mathematics, especially to Combinatorial Analysis.

**Keywords :** Combinatorial Analysis. Games. Technology in teaching.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de permutação circular .....	54
---	----



## LISTA DE FOTOS

Foto 1 – Alunos em sala de aula.....	73
Foto 2 – Respostas de alguns alunos para a questão 1.....	78
Foto 3 – Destaques de resposta à questão 2.....	79
Foto 4 - Destaques de resposta à questão 3.....	80
Foto 5 – Destaques de resposta à questão 4.....	81
Foto 6 – Destaques de resposta à questão 5.....	82



## LISTA DE IMAGENS

Imagem 1 – Ciclo básico da investigação-ação.....	59
---	----





## **LISTA DE TABELA**

Tabela 1 – Resumo dos desafios e objetivos - Parte 1 .....	65
--	----



## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Respostas das turmas para a questão 1.....	77
Gráfico 2 – Respostas da questão 2.....	78
Gráfico 3 – Respostas da questão 3.....	80
Gráfico 4 – Resposta da questão 4.....	81



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>31</b>
<b>2 ANÁLISE COMBINATÓRIA.....</b>	<b>35</b>
<b>2.1 Contagem e Análise Combinatória: Um breve histórico.....</b>	<b>35</b>
<b>2.2 A Análise Combinatória no Ensino Básico no Brasil .....</b>	<b>37</b>
<b>2.3 O ensino de Matemática baseado na resolução de problemas .....</b>	<b>39</b>
<b>2.4 O ensino da Matemática através de jogos.....</b>	<b>43</b>
<b>2.5 A tecnologia na Educação e no Ensino de Matemática .....</b>	<b>44</b>
<b>2.6 Aspectos teóricos.....</b>	<b>48</b>
2.6.1 <i>Princípios Básicos da Contagem</i> .....	50
2.6.2 <i>Fatorial</i> .....	51
2.6.3 <i>Permutações</i> .....	52
2.6.4 <i>Arranjo Simples</i> .....	56
<b>3 A METODOLOGIA DA PESQUISA.....</b>	<b>59</b>
<b>3.1 A metodologia da pesquisa .....</b>	<b>59</b>
<b>3.2 A criação da sequência didática e do aplicativo .....</b>	<b>61</b>
3.2.1 <i>A criação da sequência didática</i> .....	61
3.2.2 <i>O desenvolvimento do aplicativo: a criação do jogo</i> .....	61
<b>4 PESQUISA, ANÁLISE E RESULTADOS.....</b>	<b>65</b>
<b>4.1 Desenvolvimento da Pesquisa.....</b>	<b>65</b>
<b>4.2 Análise dos Resultados .....</b>	<b>74</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>85</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>89</b>
<b>ANEXO A -TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (ALUNOS)</b> .....	<b>93</b>
<b>ANEXO B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PAIS E</b> <b>RESPONSÁVEIS) .....</b>	<b>95</b>
<b>APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS .....</b>	<b>97</b>
<b>APÊNDICE B – Aplicativo “FOCA NA COMB”.....</b>	<b>99</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>109</b>
<b>2 O DESENVOLVIMENTO DO APLICATIVO “FOCA NA COMB” -.....</b>	<b>109</b>
<b>ASPECTOS TÉCNICOS.....</b>	<b>109</b>
<b>3 SUGESTÃO METODOLÓGICA PARA O USO DO APLICATIVO EM SALA DE</b> <b>AULA .....</b>	<b>113</b>



<b>4 OS DESAFIOS DO APLICATIVO.....</b>	<b>117</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>125</b>





## 1 INTRODUÇÃO

No contexto do ensino de Matemática na Educação Básica no Brasil, especialmente sobre o ensino de Análise Combinatória, o cenário apresenta de um modo geral, o desinteresse dos alunos em aprender tal assunto. Essa é uma realidade vivida pelo autor dessa pesquisa. Sendo professor desse conteúdo para alunos do Ensino Médio de uma escola privada no município de Ipatinga, em Minas Gerais, tal desinteresse tem conduzido esses alunos a resultados insatisfatórios nas avaliações escolares, com notas geralmente abaixo do esperado. A pergunta que surgiu foi: Quais eram os possíveis motivos para esse desinteresse e baixo rendimento? Responder essa questão não foi (e não é) uma tarefa simples e o objetivo dessa pesquisa também não é esgotar essa reflexão, mas propor um caminho para que ela possa vir a ser respondida.

Outra realidade vivida pelo professor-pesquisador é o uso de *smartphone* por parte dos alunos durante as aulas, no acesso às redes sociais, jogos, etc pela internet, os quais são impecilhos para que os temas das aulas sejam trabalhados adequadamente. O mau uso desse recurso da tecnologia móvel tem prejudicado o aprendizado dos alunos e a disciplina durante as aulas.

Diante do panorama atual apresentado e dos desafios a serem vencidos, surgem alguns questionamentos: (1) De que maneira a utilização de novas tecnologias pode contribuir para o ensino da Análise Combinatória? (2) Entre tantos recursos tecnológicos, quais são aqueles que podem auxiliar especificamente no ensino e resolução de problemas envolvendo contagem?

Em relação ao uso de novas tecnologias a resposta vem de Cavalcante (2010), pois para ele, a Matemática não pode ser resumida a técnicas e sem nenhuma relação com o mundo atual. Ainda de acordo com Cavalcante (2010), as tendências da Educação Matemática como resolução de problemas e modelagem, entre outras existentes, se preocupam em possibilitar a atividade de ensino-aprendizagem, com o intuito de promover mudanças sociais importantes e transformações que contribuam para um país mais justo e com menos desigualdades. Dessa maneira, não se pode fingir e ignorar que recursos tecnológicos avançados estão disponíveis para muitos jovens e adolescentes do nosso país, fazendo parte do cotidiano deles e a escola não pode estar alheia a isso.

Com relação ao segundo questionamento, depois de leituras e análises, optou-se pelo *Android Studio* para a realização desse trabalho, uma plataforma para

desenvolvimento de *software* muito usada na criação de aplicativos e que pode ser muito útil na criação de produtos educacionais e Objetos de Aprendizagem.

Assim, a pergunta central que direciona essa pesquisa é: Quais as contribuições que um aplicativo para *smartphone*, desenvolvido na plataforma *Android Studio*, pode proporcionar ao ensino da Análise Combinatória para alunos da Educação Básica?

O cenário vivido pelo autor dessa pesquisa não é uma exclusividade dele quanto ao assunto da prática docente na Educação Básica no Brasil. O desânimo e o desinteresse dos alunos em "querer aprender" podem estar associados a outros fatores. De acordo com UNESCO (2008), uma realidade apresentada pela educação brasileira é o fato de muitas escolas, ainda hoje, desenvolverem metodologias de ensino que não acompanham a evolução do mundo e que acreditam que a forma de aprendizado do aluno não mudou em relação ao século passado. Percebe-se que o desinteresse pelo conteúdo escolar tem aumentado gradativamente, pois, para os alunos, o que se aprende na escola, fica na escola: não serve para o cotidiano. Em algumas instituições de ensino é percebida a necessidade de mudanças nas práticas pedagógicas, mas elas não conseguem executá-las.

Desse modo, a Matemática da sala de aula também é vista sob essa perspectiva pela maioria dos estudantes. A "Matemática da escola" é diferente da "Matemática da rua", isto é, a Matemática do dia-a-dia (LINS E GIMENEZ, 1997). Por isso ela se torna chata, sem sentido e as aulas se tornam entediantes.

Um reflexo da realidade apresentada no parágrafo anterior está presente no relato feito por Fernandes (2016), no qual afirma que o Brasil é um dos países que mais tiveram uma redução significativa na quantidade de alunos com conhecimentos básicos de Matemática, permanecendo ainda um dos últimos colocados em um *ranking* de competências nessa disciplina.

Analogamente, o ensino da Análise Combinatória também faz parte dessa realidade, pois o desinteresse dos alunos pelo assunto, a dificuldade em apresentar metodologias que favorecem o processo de ensino-aprendizagem e o baixo rendimento no aprendizado desse conteúdo retratam um cenário preocupante. Não são poucos os relatos sobre professores que enfatizam o uso de fórmulas, apresentadas na maioria das vezes aos alunos de modo inadequado, mecânico e sem sentido. Almeida e Ferreira (2009) relatam que "é comum o ensino da Combinatória processar-se através da exposição e aplicação repetida de fórmulas à resolução de exercícios e problemas". Ainda segundo Costa (2013),

“estas dificuldades são evidenciadas através de trocas de experiências docentes e, formalmente, através de resultados das avaliações nacionais e estaduais das escolas públicas”. Na escola privada não é diferente, pois desenvolver metodologias que favorecem o raciocínio e o processo investigativo constitui-se num grande desafio para o professor do século XXI. Metodologias adequadas e eficazes são essenciais para o ensino de Análise Combinatória, visto que esse tema está diretamente relacionado a problemas de contagem, que exigem raciocínio apurado.

Desenvolver o pensamento combinatório é algo fundamental na formação dos alunos da educação básica. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL,2000, p.44).

Além disso, os PCN's também mostram que

Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 2000, p.52).

Assim, esse trabalho apresentou como objetivo central investigar o uso de aplicativo em *smartphone*, por alunos do ensino médio, em sala de aula, como alternativa para o ensino de Análise Combinatória.

No que tange aos objetivos específicos, a presente dissertação buscou:

- (i) Criar atividades de Análise Combinatória que estejam relacionadas com a realidade dos alunos;
- (ii) Utilizar atividades para construir uma Sequência Didática;

(iii) Criar um aplicativo para *smartphone* com finalidade de ensino de Análise Combinatória;

(iv) Propor uma estratégia didática que possa ser utilizada no ensino de Análise Combinatória;

O presente trabalho foi organizado em capítulos da seguinte maneira:

- No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica, abordando a Análise Combinatória, seus aspectos teóricos e históricos, seu ensino baseado na resolução de problemas, além do uso da tecnologia no ensino da Matemática e a criação de novas metodologias para o ensino de Matemática.
- A metodologia do projeto é apresentada no capítulo 3 com o cronograma da pesquisa, a metodologia baseada na “pesquisa-ação” e aspectos da criação e desenvolvimento da sequência didática e do Objeto de Aprendizagem.
- O capítulo 4 trata sobre a aplicação da sequência didática, do Objeto de Aprendizagem e questionário, além do público alcançado, local e relato da experiência baseado na aplicação do Objeto de Aprendizagem e a análise dos resultados.
- Por fim, no capítulo 5 são feitas as considerações finais, com observações e conclusões sobre a pesquisa realizada.

Ainda há o registro dos autores e obras que serviram de base para essa pesquisa, nas referências bibliográficas. O produto final dessa dissertação está no Apêndice B, assim como o questionário aplicado aos participantes, no Apêndice A.

Assim, espera-se que essa pesquisa possa contribuir com uma alternativa de ensino e aprendizagem de noções básicas de contagem e conceitos de Análise Combinatória.

## 2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

### 2.1 Contagem e Análise Combinatória: Um breve histórico

O processo de contagem e noções ligadas à teoria dos conjuntos atraiu a atenção do homem desde os primórdios da história. Em geral, considera-se como a Matemática mais antiga aquela obtida como resultado da tentativa de o ser humano elaborar e organizar os conceitos de grandeza, forma e número. Desse modo, surgiu a noção de “contar”. Ainda, de acordo com Morgado et al (2006).

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é “contar”, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (Morgado et al., 2006, p.17)

Segundo Eves (2004), o conceito de número e as primeiras noções de contagem surgiram antes dos primeiros registros históricos. Existem evidências arqueológicas que há aproximadamente 50.000 anos o homem já era capaz de contar. Possivelmente a contagem nesse período ocorria baseando-se no princípio da correspondência biunívoca. Por exemplo, para a contagem de animais, os dedos eram usado sendo cada dedo relacionado com um animal diferente. Para uma quantidade grande de animais ou objetos, pedras também eram usadas. Cada pedra representa um animal ou objeto específico. Entalhes num pedaço de madeira ou nós em cordas também era bastante comum no processo de contagem nesse período.

Com essa necessidade de contar e o surgimento da escrita, símbolos matemáticos que representam quantidade também foram criados. Há registros históricos muito interessantes que comprovam esse fato. Segundo Mol (2013), na pré-história construções quantitativas um pouco mais elaboradas foram encontradas em algumas tribos da Nova Guiné, da África e da América do Sul. Há registros mostrando a existência de palavras para representar a ideia de “um”, “dois” e, a partir daí, os números foram construídos pela justaposição destas duas palavras: “dois-um”, “dois-dois” e assim por diante, até chegar numa certa quantidade bem numerosa, no qual o processo de contagem é finalizado e todas as quantidades a começar desse valor limite são chamados de muitos. Esse sistema é

chamado de 2-sistema. O sistema de numeração atual é chamado de sistema de numeração decimal, que utiliza a base 10, número total dos dedos das mãos, muito usados no processo de contagem primitiva. Os algarismos indo-arábicos utilizados até hoje e referência do sistema de numeração decimal é assim chamado pois foram inventados pelos hindus e divulgados pelos árabes na Europa Ocidental (Os primeiros registros desses algarismos datam por volta do século II a.C).

Com o desenvolvimento do processo de contagem, surge a necessidade de agrupar, isto é, organizar elementos em grupos menores, visando a facilitação desse processo. Sistemas de agrupamentos foram criados e desenvolvidos, como o Sistema Jônico ou Alfabético criado pelos gregos em torno de 450 a.C e o Sistema de Numeração Maia, descoberto pelos espanhóis no século XVI. De acordo com Eves (2004), o Sistema de Agrupamento Simples talvez seja o mais antigo sistema de numeração e agrupamento criado. Nesse sistema, toma-se um número  $b$  como base e adotam-se símbolos para  $1$ ,  $b$ ,  $b^2$ ,  $b^3$ , e assim sucessivamente. “Então, qualquer número se expressa pelo uso de símbolos aditivamente, repetindo cada um deles o número necessário de vezes” (EVES, 2004, p.30).

Todo o desenvolvimento do processo da contagem e a necessidade de agrupar elementos deu origem ao surgimento e estudo da Análise Combinatória. Segundo Wieleitner (1932 apud VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p.2), o problema mais antigo que envolve os números e a Análise Combinatória é o da formação dos quadrados mágicos. Chama-se de quadrados mágicos (de ordem  $n$ ) um arranjo de números  $1, 2, 3, \dots, n$  em um quadrado  $n \times n$  de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. “O primeiro quadrado mágico conhecido é o Lo Shu, datado do século I d.C. (NEEDHAM, 1959 apud VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p.2), mas que pode ser mais antigo, por volta de 2.000 a.C (BERGE, 1971 apud VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p.2).

Outro problema interessante envolvendo Análise Combinatória e números está no papiro egípcio de Rhind, escrito em 1650 a.C. O problema 79 que diz (WILSON; LLOYD, 1990 apud VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p.3): “Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo?”.

Ainda segundo VAZQUEZ e NOGUTI (2004), a Análise Combinatória surge de fato como um novo ramo da Matemática no final do século XVII e pouco anos depois surgiram três livros importantes: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars*

*magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher. Os trabalhos desenvolvidos por Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718) também merecem destaque. Leibniz definiu em 1666 a Combinatória como "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos". Nicholson em 1818, definiu-a como "o ramo da Matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si".

Vários matemáticos destacaram-se no estudo da Análise Combinatória, relacionando esse tema inicialmente ao estudo do Binômio de Newton e de Probabilidades. Por exemplo, o início do estudo sobre Probabilidades ocorreu em 1654 com a troca de cartas entre Pascal e Fermat sobre o Problema dos Pontos colocado para Pascal por Chevalier de Méré (IME/UNICAMP, 2010). O estudo e formulação do Binômio de Newton é obra de Isaac Newton, matemático e físico inglês do final do século XV e início do século XVI. Em ambos os casos, a Análise Combinatória constituiu-se numa ferramenta essencial para o avanço no estudo dessas teorias.

Nos últimos anos do século XX e no início do século XXI, a teoria da Análise Combinatória e problemas envolvendo contagem continuam em alta devido ao avanço tecnológico. Com a evolução da informática e surgimento de problemas envolvendo grafos e análise de algoritmos, a Análise Combinatória tem sido um pilar importante para a resolução e estudo dessas questões. De acordo com Costa (2013), "a Análise Combinatória não apenas permeia os distintos ramos da Matemática, como também as diversas ciências, como a Física, Química, Biologia e Economia".

## **2.2 A Análise Combinatória no Ensino Básico no Brasil**

Diante da importância dos problemas de contagem e da Análise Combinatória na história da humanidade, um triste cenário se configura no Ensino Básico das escolas brasileiras no início do século XXI. Os alunos em geral não se interessam por problemas que envolvem combinações, arranjos e permutações. E esse desinteresse tem levado os alunos a péssimos resultados nas avaliações escolares, com notas geralmente muito abaixo do esperado. A pergunta que surge é: Quais os possíveis motivos para esse desinteresse? Muitas são as variáveis para responder essa questão. E o objetivo dessa dissertação não é esgotar essa reflexão, mas apenas propor um caminho para que essa questão seja respondida e essa realidade seja mudada.

Em primeiro lugar, deve ser considerado o uso excessivo e inadequado de fórmulas no processo de ensino-aprendizagem. Segundo Silva (2013), o ensino de Análise Combinatória tem focado na memorização de fórmulas que muitas vezes não possuem sentido para o aluno, ou seja, é preciso compreender que a Análise Combinatória é muito mais do que simplesmente decorar fórmulas matemáticas.

Historicamente, o ensino da Análise Combinatória no Brasil está relacionado ao uso, muitas vezes exagerado, das relações matemáticas que envolvem combinações, arranjos e permutações. É comum observar esse fato em vários livros de Matemática que tratam do assunto. Isso contribui para realçar as dificuldades dos alunos em assimilar e desenvolver o raciocínio com os conceitos envolvidos. Segundo Bataner (1996, p. 8) as falhas dos alunos são falhas aritméticas. Eles se confundem sobre o tipo de elementos que se devem combinar, mas conseguem identificar o cálculo combinatório exigido numa determinada situação-problema.

Outro fator relevante é a formação inadequada dos docentes na área de Matemática no Brasil. Não se questiona aqui a bagagem teórica que cada profissional adquiriu ao longo de sua formação acadêmica e sim o modo como passam a ensinar quando entram em sala de aula. O que se vê é o repasse de metodologias ultrapassadas, transmitidas de geração em geração, de professor para professor. O uso excessivo de fórmulas demonstra muitas vezes que o professor de Matemática ensina de forma descontextualizada, com metodologias inapropriadas, distantes da realidade do aluno. Aqui não se defende a banalização ou a perda do rigor matemático. O que deve ser repensado é o processo de ensino-aprendizagem, com metodologias que valorizam o caráter investigativo e o conhecimento prévio de mundo que cada aluno possui.

De acordo com Skovsmose (2005 apud SILVA, 2013, p.3) a Educação Matemática deve ajudar os alunos a aprenderem certos conhecimentos e técnicas, mas também deve levá-los à reflexão sobre como transformar em ação essas formas de conhecimentos e de técnicas. Não adianta o professor ter o conhecimento teórico de sua área, se não sabe e não usa metodologias adequadas para buscar um aprendizado eficaz de seu aluno. Educar matematicamente é diferente de reproduzir o conteúdo que existe nos livros. Segundo Gonçalves (2014), a lacuna entre teoria e prática, entre ensino e o aprendizado, geralmente ocorre devido à falta de preparo da equipe docente e da pedagógica, as quais necessitam muitas vezes de atualização profissional. Com isso, a educação se torna algo desgastado onde se faz necessária a reflexão e a busca de um novo paradigma para que gradativamente



seja possível a implementação de novas estratégias e metodologias de ensino.

Silva (2013) cita na página 4 no ano de 2005 que Geraldo Perez destaca um dos projetos de maior importância na investigação em Educação Matemática: o processo de ensino-aprendizagem onde o aluno, o professor e o saber matemático estão presentes. É preciso que o professor compreenda que a sua formação nunca será um processo acabado. Repensar sua formação e formas de ensino que alcancem o real aprendizado do aluno deve ser algo a que o docente deve estar sempre atento, conectado com o mundo e com a realidade do estudante.

Diante dessa realidade, é preciso estar atento à dinâmica de sala de aula. Com metodologias adequadas, de acordo com Almeida e Ferreira (2009), estimular o trabalho em grupos pode proporcionar muitos benefícios aos alunos. Eles aprendem a questionar, trocam ideias uns com os outros e aprendem a trabalhar coletivamente. A experiência coletiva contribui para a formação individual e favorece a cooperação entre indivíduos. Porém, esse tipo de trabalho deve ser pensado, planejado pelo professor e conduzido de modo harmonioso, que contribua para o aprendizado eficaz do aluno.

Refletindo sobre essas questões, torna-se pertinente evidenciar que o ensino da Análise Combinatória também se encontra presente nesse contexto. A utilização de metodologias que proporcionam a investigação, que agucem a curiosidade do aluno, tendo o tripé “aluno-professor-saber matemático” bem ajustado e equilibrado, podem trazer benefícios na construção do pensamento combinatório do estudante.

### **2.3 O ensino de Matemática baseado na resolução de problemas**

Tradicionalmente, o processo de ensino-aprendizagem envolvendo a Matemática baseou-se, de um modo geral, na memorização de fórmulas e no desenvolvimento de algebrismos mecanizados. De acordo com Romero (2007), os conteúdos de Matemática geralmente são apresentados aos alunos como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. Ainda segundo ela, esse tipo de ensino tem se preocupado em garantir que os alunos dominem apenas técnicas e fórmulas, em vez de desenvolverem também a compreensão real dos conceitos relacionados a esses conteúdos.

Diante desse panorama, é necessário refletir sobre as metodologias e estratégias utilizadas no ensino de Matemática.

De acordo com Gonçalves (2014), existem muitas estratégias de ensino que podem ser usadas e contribuir de modo significativo no processo de aprendizagem em Matemática. Observar, manipular objetos, vivenciar certas experiências, levantar dados, propor desafios matemáticos e resolver de problemas são algumas dessas estratégias.

Diante dessa perspectiva, é importante entender o que significa metodologia de ensino. Ainda segundo Gonçalves (2014), metodologia de ensino é o estudo das técnicas para o ensino e para a aprendizagem. No que tange ao processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, um recurso apropriado e que pode trazer contribuições significativas é o ensino baseado na resolução de problemas. Desse modo: “A metodologia de resolução de problemas consiste na utilização de situações-problema para introdução, desenvolvimento e construção do raciocínio combinatório nos alunos” (GONÇALVES,2014).

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais BRASIL (1997, p.51) apontam como objetivos do ensino da Matemática:

Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.

e:

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL,1998, p.40).

De acordo com Lupinacci e Botin:

A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvidos através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI E BOTIN, 2004, p.1)

Propostas didáticas baseadas na resolução de problemas, trabalhando o raciocínio lógico e proporcionando experiências que podem contribuir para o aprendizado do aluno

são de grande importância para uma mudança dentro da realidade apresentada nas escolas. De acordo com Lima (2011), resolver um problema é uma atividade desafiadora. Um sujeito está diante de um problema quando se encontra em uma situação que, inicialmente, não é satisfatória e num primeiro momento não encontra uma solução. O esforço por encontrar uma solução é que induz o indivíduo a criar estratégias e métodos.

Stanic e Kilpatrick (1989) discutiram três temas gerais mostrando a importância da resolução de problemas nos currículos da “Matemática Escolar”. Em primeiro lugar, destaca-se a resolução de problemas como contexto, que é dividido em cinco subtemas: como justificativa, como motivação, como recreação, como veículo e como prática. Em segundo lugar, destaca-se a resolução de problemas como capacidade, isto é, a resolução de problema é vista como um número de habilidades a serem ensinadas no currículo matemático com o objetivo de resolver problemas rotineiros e não rotineiros. Por fim, mostra-se a resolução de problemas como arte. Essa percepção surge a partir dos trabalhos de George Polya, com a ideia da heurística (a arte da descoberta). O objetivo principal é levar os alunos a compreenderem como a Matemática foi descoberta e assim estimulá-los a fazer suas próprias descobertas.

Fernandes e Oliveira (2015) ainda registram que as primeiras pesquisas sobre o ensino de Matemática usando a estratégia da resolução de problemas começaram sob a influência de George Polya (Universidade de Stanford-EUA), que foram propostas no livro “A Arte de Resolver Problemas”. Ele apresentou um método baseado em quatro etapas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano, fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original.

Gazire (1988), em sua dissertação de mestrado, apresenta perspectivas em Educação Matemática para a resolução de problemas em três etapas: um novo conteúdo, aplicação do conteúdo e um meio de se ensinar Matemática. Seu trabalho apresenta uma perspectiva baseada na resolução de problemas como um meio de se ensinar Matemática, tendo o problema como o desencadeador do processo de ensino-aprendizagem. A autora afirma que a principal característica dessa perspectiva é “se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido.”

Essa última citação feita por Gazire mostra um aspecto importante dentro do ensino da Matemática através da resolução de problemas: o caráter investigativo que essa estratégia sugere. A proposta de apresentar um desafio-problema para o aluno, a fim de se

introduzir posteriormente um determinado conceito, pode ajudar de modo eficaz para que esse aluno desenvolva suas próprias estratégias para resolvê-lo. Esse processo é bem interessante pois segue um caminho diferente do processo tradicional usado geralmente em sala de aula. Em vez de o professor introduzir o conceito inicialmente com definições e conceitos formais, o aluno de modo lúdico e interativo, relacionando-se com o desafio, começa no seu próprio ritmo e, através da sua própria investigação, a criar meios e a elaborar estratégias de resolução do desafio que serão importantes no entendimento dos novos conceitos que surgirão. Nesse processo, o professor que apenas reproduz o conteúdo dos livros perde seu espaço. Entra em cena o docente que instiga, provoca o aluno com desafios e questões devidamente elaboradas para que ele consiga, através da experimentação e investigação, aprender de modo significativo os novos conceitos que surgirão.

De acordo com Polya:

A Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem aprendê-la sem a participação ativa; por isso o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar. (POLYA, 1978, p.35)

Segundo Sousa:

Os alunos, ao resolverem problemas, podem descobrir fatos novos sendo motivados a encontrarem várias outras maneiras de resolverem o mesmo problema, despertando a curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos e assim desenvolverem a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas. (SOUSA, 2001, p.3)

O ensino de Análise Combinatória pode se beneficiar dessa estratégia. Em vez de apresentar ao aluno, num primeiro momento, conceitos e fórmulas matemáticas, a apresentação de desafios que irão atrair a atenção e o interesse do aluno pode constituir-se numa excelente estratégia no processo de ensino-aprendizagem. De acordo com LIMA:

[...]quando a análise combinatória é estudada de forma intuitiva, os alunos compreendem com mais facilidade o resultado encontrado. Por outro lado, se as fórmulas são apresentadas de forma pronta e acabada, os alunos ficam sem saber em qual momento deverão utilizar cada uma delas e o ensino da análise combinatória torna-se tecnicista e operacional. (LIMA, 2011, p.15)

## 2.4 O ensino da Matemática através de jogos

A Matemática escolar geralmente é entendida como uma disciplina de difícil compreensão e com conceitos abstratos. A discrepância criada entre a Matemática do cotidiano e a Matemática da sala de aula, como relata Lins e Gimenez (1997), faz com que, de um modo geral, o conteúdo lecionado não seja atraente e conseqüentemente, haja desinteresse no aprendizado.

A estratégia baseada na resolução de problemas, como dito anteriormente, pode ser uma boa medida para mudanças no processo de ensino-aprendizagem da Matemática nas escolas. E a utilização de jogos com essa finalidade pode enriquecer e contribuir para a eficácia dessa metodologia. A palavra jogo, do latim *locus*, significa, etimologicamente, gracejo e zombaria, sendo empregada no lugar de *ludus*, que representa brinquedo, jogo, divertimento e passatempo (SANTOS, 2010).

Segundo Rêgo e Rêgo (2000 apud BARBOSA; CARVALHO, 2008), é necessária a introdução de novas metodologias de ensino. Nessas metodologias, o aluno deve ser o sujeito da aprendizagem, sendo o seu contexto devidamente respeitado e levando em consideração os aspectos recreativos e lúdicos das motivações próprias de sua idade, sua curiosidade e a vontade de desenvolver atividades em grupo. Nesse contexto, a utilização de jogos, de modo apropriado e com objetivos bem definidos, pode ser benéfico no processo de aprendizagem do aluno.

Ainda segundo Barbosa e Carvalho (2008), dentro da resolução de problemas, a introdução de jogos como estratégia do processo de ensino-aprendizagem na escola é um recurso pedagógico que apresenta bons resultados. Esse recurso cria situações que permitem ao aluno desenvolver métodos próprios para resolver problemas, além de estimular sua criatividade num ambiente desafiador e ao mesmo tempo gerador de motivação. Esse cenário favorece significativamente o aprendizado real do aluno.

De acordo com Ribeiro (2009), o jogo pode ser considerado como um meio pelo qual o educando expressa suas qualidades espontâneas e que permite ao educador compreender melhor seus alunos.

Cabral (2006) menciona que a justificativa para o uso do jogo no ensino de Matemática está na possibilidade de introduzir uma linguagem matemática que gradativamente será incorporada aos conceitos matemáticos formais, à medida que se desenvolve a capacidade de lidar com informações e criar significados culturais para os conceitos

matemáticos e estudo de novos conteúdos. Para Cabral (2006), a Matemática deve buscar no jogo a ludicidade das soluções construídas para as situações-problema do cotidiano.

É importante destacar que alguns cuidados devem ser tomados quando o assunto é a utilização de jogos em sala de aula. Ainda segundo Cabral (2006), os jogos vêm ganhando espaço na escola. Porém se a motivação for equivocada, numa tentativa de trazer apenas o lúdico para dentro da sala de aula, não trará resultados benéficos para o aprendizado. Para Cabral (2006), o jogo se convenientemente planejado, pode ser um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento matemático.

Muitas são as contribuições dos jogos para o ensino de Matemática, quando os objetivos e as motivações estão bem definidos para o seu uso. Além de atrair, motivar e introduzir de forma lúdica conceitos matemáticos através de desafios e problemas, pode também contribuir para o processo de socialização e para o aprendizado do trabalho em grupo. Assim, o ensino da Análise Combinatória através de jogos e desafios investigativos pode se tornar algo produtivo e enriquecedor no processo de ensino-aprendizagem.

## **2.5 A tecnologia na Educação e no Ensino de Matemática**

No início do século XXI o que se vê na sociedade brasileira é um grande acesso da população (e conseqüentemente dos alunos) ao desenvolvimento tecnológico e científico porém, um imenso descontentamento desses mesmos alunos dentro das escolas. Um questionamento que surge é: os avanços tecnológicos podem contribuir positivamente para o aprendizado significativo do aluno em sala de aula?

A resposta para essa pergunta é “SIM”, porém é preciso entender o real significado da palavra tecnologia e suas implicações no cotidiano das pessoas para que esses recursos possam ser usados corretamente no processo de ensino - aprendizagem dentro das instituições de ensino.

De acordo com Betts et al.(s.d), Tecnologia (do grego *τεχνη* “ofício” e *λογία* “estudo”) é um termo que envolve o conhecimento técnico e científico e as ferramentas, processos e materiais criados e/ou utilizados a partir de tal conhecimento.

Segundo Silveira e Bazzo (2005), a tecnologia sofre e causa transformações profundas de caráter político, econômico, social e filosófico, na História a partir do séc. XVII. Devido a essa questão, Miranda (2002) afirma que ‘a tecnologia vai além do mero estudo da técnica, pois ela nasceu quando a ciência, a partir do Renascimento, aliou-se à

técnica, visando promover a junção entre o saber e o fazer (teoria e prática).

De acordo com Perius (2012), o avanço tecnológico tem influenciado muito a vida das pessoas, ditando modos e comportamentos, criando inovações e conhecimentos diversos. Comparando-se o modo de vida de alguns anos atrás, percebe-se que há uma exigência mais acentuada com a execução das tarefas rotineiras, devido à necessidade atual de se obter a informação de uma forma rápida e interativa.

Ainda segundo Perius:

A sociedade atual é marcada pela manifestação de um mundo totalmente tecnológico, que atinge o modo de se comunicar, o modo de produzir e de agregar novas informações ao cotidiano, de maneira globalizada e uniforme. E essa nova forma de se comunicar também chegou à escola, atingindo o processo de ensino por constantes mudanças. (PERIUS, 2012, p.27)

Diante dessas análises, é importante destacar o fato de que o uso de novas tecnologias é algo comum no cotidiano daqueles que frequentam regularmente a sala de aula. E a escola não pode ignorar essa realidade. Segundo Mercado et al. (1998), as instituições educacionais enfrentam o desafio de incorporar as novas tecnologias como conteúdos do ensino, além de reconhecer e partir das concepções que os alunos têm sobre essas tecnologias para elaborar, desenvolver e avaliar práticas pedagógicas que permitam o desenvolvimento de uma disposição reflexiva sobre os conhecimentos e os usos tecnológicos. De acordo com UNESCO (2009), os professores precisam adquirir a competência que lhes permitirá proporcionar a seus alunos oportunidades de aprendizagem com apoio da tecnologia. O docente deve estar preparado para utilizar a tecnologia e saber como ela pode dar suporte ao aprendizado. O que ocorre muitas vezes é que as instituições de ensino brasileiras não estão preparadas para trabalhar com os novos recursos tecnológicos e tão pouco os professores são preparados para tal função.

Nesse contexto, é oportuno destacar a utilização da tecnologia móvel. *Smartphones* e *tablets*, exemplos de tecnologias móveis, são cada vez mais comuns no cotidiano das pessoas. Suas funções auxiliam na execução de tarefas e tornam práticas a realização de determinadas atividades. No âmbito escolar, esses recursos podem ser úteis no processo de ensino-aprendizagem. De acordo com UNESCO (2014), *tablet* e *smartphone* são utilizados por alunos e educadores em todo o mundo para acessar informações, racionalizar e simplificar a administração, além de facilitar a aprendizagem de maneiras novas e inovadoras. Surge, desse modo, o conceito de aprendizagem móvel. Ainda de acordo com UNESCO (2014):

A aprendizagem móvel envolve o uso de tecnologias móveis, isoladamente ou em combinação com outras tecnologias de informação e comunicação (TIC), a fim de permitir a aprendizagem a qualquer hora e em qualquer lugar. A aprendizagem pode ocorrer de várias formas: as pessoas podem usar aparelhos móveis para acessar recursos educacionais, conectar-se a outras pessoas ou criar conteúdos, dentro ou fora da sala de aula. A aprendizagem móvel também abrange esforços em apoio a metas educacionais amplas, como a administração eficaz de sistemas escolares e a melhor comunicação entre escolas e famílias. (UNESCO, 2014, p.8)

A tecnologia móvel pode trazer benefícios para o processo de aprendizado. De acordo com UNESCO (2014), a utilização dessa ferramenta no ensino possibilita:

- A aprendizagem individualizada;
- O retorno e avaliações imediatos;
- A aprendizagem a qualquer hora, em qualquer lugar;
- O uso produtivo do tempo em sala de aula;
- Apoiar a aprendizagem fora da sala de aula;
- Criar uma ponte entre a aprendizagem formal e a não formal;
- Auxiliar estudantes com deficiências;

entre outros benefícios.

Outro aspecto importante sobre a utilização de tecnologias móveis é que a maioria das políticas de TIC no campo da educação foi criada antes do surgimento dos aparelhos móveis, como menciona UNESCO (2014). Assim, elas não procuram melhorar os potenciais das tecnologias móveis para a aprendizagem. As poucas políticas que fazem referência a aparelhos móveis tendem a tratá-los tangencialmente ou a proibir sua utilização nas escolas. Talvez esse seja o principal motivo da rejeição dessas ferramentas por parte dos docentes do ensino básico brasileiro.

Mesmo com tantos recursos que podem ser utilizados no ensino, o professor continua tendo um papel importante no processo de ensino-aprendizagem. É oportuno destacar que o docente nunca será substituído pela tecnologia. Ambos devem trabalhar em harmonia em prol de um objetivo comum: o aprendizado do aluno. Para que isso ocorra, o professor deve estar muito bem preparado, concatenado com tecnologias educacionais e ter um conhecimento teórico satisfatório, para que consiga ser um “mediador” eficiente na



condução do aprendizado do aluno. Desse modo, sai de cena o professor que reproduz o conteúdo do livro didático e entra em cena o professor questionador, provocador, investigador, que aguça a curiosidade e a vontade de aprender do estudante. Esse fato corrobora Jucá (2006), que diz:

As novas tecnologias não dispensam a figura do professor, pelo contrário, exigem deste, que adicione ao seu perfil novas exigências mais complexas tais como: saber lidar com os ritmos individuais de seus alunos, apropriar-se de técnicas novas de elaboração de material didático produzidos por meios eletrônicos, trabalhar em ambientes virtuais diferentes daqueles do ensino tradicional...,adquirir uma nova linguagem e saber manejar criativamente a oferta tecnológica. (JUCÁ, 2006, p.23)

O presente trabalho, nos capítulos 3 e 4, trata sobre a criação e utilização de um aplicativo para *smartphone*, com o intuito de contribuir para a construção do conhecimento em sala de aula. Sobre essa questão, Cláudio e Cunha (2001 apud PICOLLI, 2006, p.45) diz:

[...] para possibilitar ao aluno construir seu conhecimento, é preciso que o professor escolha um tipo de software adequado para isso. [...] É imprescindível que o professor tenha um profundo conhecimento do conteúdo que trabalhará e do software que adotará. Além disso, ele deve estar sempre interagindo com o aluno, questionando seus resultados, interpretando seu raciocínio e aproveitando os erros cometidos como forma de explorar os conceitos que não ficaram bem esclarecidos. Assim, esse professor estará, claramente, utilizando o computador como uma ferramenta inteligente, enquanto ele desempenha um papel de facilitador entre o aluno e a construção do seu conhecimento.

Para Perius (2012), a tecnologia educacional é importante para o aprendizado do aluno como também é de grande relevância na formação do professor. A articulação da prática, da investigação e dos conhecimentos teóricos requeridos são fundamentais para uma transformação produtiva na ação pedagógica. Para que isso ocorra, o professor deve vivenciar situações nas quais a informática seja utilizada como recurso educacional, com o intuito de que o docente compreenda a importância e eficácia do aprendizado através do uso de recursos tecnológicos através de metodologias adequadas.

No que diz respeito ao uso da tecnologia no ensino da Matemática, as questões discutidas nos parágrafos anteriores continuam sendo muito pertinentes. Para D'Ambrósio (1996) no decorrer da história da humanidade, Matemática e Tecnologia se desenvolveram em numa associação muito íntima, que pode ser caracterizada como simbiótica. A tecnologia, entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a

Matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode ser separada da tecnologia disponível.

Aqui é importante fazer uma observação. Apesar de esse trabalho tratar sobre as novas tecnologias educacionais que surgiram e continuam surgindo no século XXI, vale lembrar que existem muitos outros recursos que podem ser usados no ensino em qualquer disciplina, incluindo o ensino da Matemática. Segundo Cavalcante (2010), os recursos tecnológicos são diversos, como por exemplo, a calculadora, um retro projetor, o vídeo e até a mais simples de todas as ferramentas tecnológicas: o giz. Esses instrumentos já fazem parte há algum tempo cotidiano do profissional da educação. Porém quando se trata do uso de microcomputadores e seus *software* educativos, refere-se a uma potencial ferramenta que ainda não se encontra, de forma aceitável, inserida na prática docente do professor de Matemática.

Em relação ao uso de *software* educativo no ensino da Matemática, Gravina e Santarosa (1998) afirma que, no contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o “fazer matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar. Nesse quadro o aluno se torna um ser ativo, que age sobre a situação diferente do papel passivo que muitas vezes exerce, diante de aulas onde o professor apenas reproduz o conhecimento mecanicamente.

## 2.6 Aspectos teóricos

Para que toda pesquisa estivesse bem estruturada e fundamentada, foi preciso inicialmente recorrer à Teoria da Análise Combinatória e aos conceitos ligados à noções de contagem.

Segundo Gonçalves (2014), a Análise Combinatória é a técnica utilizada para quantificar objetos de um dado conjunto sem a necessidade de listar ou enumerar todos os seus elementos. Para Costa (2013), a Análise Combinatória é uma ramo da Matemática que busca desenvolver métodos que permitam a contagem - de uma forma indireta - o da quantidade total de elementos de um determinado conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

De acordo com Roa e Navarro-Pelayo:

Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias. (ROA e NAVARRO- PELAYO, 2001, p.255)

Para Morgado et al. (1991, p.1), a Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória é muitas vezes entendida por maior parte dos alunos, apenas como os estudo de combinações, arranjos e permutações. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória.

Por exemplo, dado o conjunto  $A = \{1,3,5,7,9\}$ , pode se levantar a seguinte questão: qual a quantidade de números naturais de 4 algarismos que podemos formar utilizando os elementos do conjunto A? Esse é um tipo de problema de Análise Combinatória. Para resolver esse problema é necessário formar agrupamentos. Nesse caso, os agrupamentos devem conter 4 algarismos, ou seja, devem-se formar grupos tomando os elementos do conjunto A de 3 em 3, não importando se os elementos são distintos (o agrupamento pode ter elementos repetidos).

A Análise Combinatória serve hoje de base, tanto para resolver situações do cotidiano (contabilizar número de senhas de cartões de crédito ou total de placas de automóveis que podem ser criadas no Brasil) como para a várias teorias da Matemática avançada: probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, etc.

Basicamente, todo o processo de resolução de problemas envolvendo Análise Combinatória está diretamente relacionado aos Princípios Básicos da Contagem, sendo esses problemas geralmente subdivididos em dois grupos: Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. A esses princípios também estão relacionados os conceitos de Permutações, Arranjos e Combinações. A seguir, segue a abordagem desses temas com conceitos e exemplos para melhor compreensão, com base nos conteúdos apresentados no livro do Dante (2013) e nas notas de aula de Freire (2001).

### 2.6.1 Princípios Básicos da Contagem

#### a. Princípio da Adição ou Princípio Aditivo

De acordo com Freire (2001), dado dois conjuntos disjuntos  $A$  e  $B$ , com  $A$  possuindo  $x$  elementos e  $B$  possuindo  $y$  elementos, então  $A \cup B$  possui  $x + y$  elementos.

Esse conceito pode ser expandido para  $n$  conjuntos disjuntos através da associatividade da adição, sendo o total de elementos da união desses conjuntos igual a soma da quantidade dos elementos de cada conjunto.

Para exemplificar esse conceito, imagine que Roberto tenha 10 camisas e 5 camisetas em seu guarda-roupa. De quantas maneiras ele pode escolher um desses itens para sair com os amigos?

Para solucionar esse problema, considere:

$$A = \{x \mid x \text{ é uma camisa}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é uma camiseta}\}$$

Como a interseção entre  $A$  e  $B$  é vazia, isto é,  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos e apenas um item será escolhido dentro desses conjuntos, temos que o total de possibilidades de

escolhas de Roberto é exatamente o total de elementos que possui o conjunto

$A \cup B = \{x \mid x \text{ é uma camisa ou uma camiseta}\}$ , que possui 15 elementos (10 + 5). Logo,

pelo Princípio da Adição, Roberto tem 15 opções de escolha.

#### b. Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

De acordo com Dante (2013), esse princípio consiste em: Se há  $x$  possibilidades para a tomada de uma decisão  $A$  e  $y$  possibilidades para a tomada de uma outra decisão  $B$ , o total de possibilidades para a tomada de decisão de  $A$  e  $B$  simultaneamente é dado

por  $x \times y$ . Esse conceito pode ser expandido para  $n$  decisões através da associatividade da multiplicação, sendo o total de possibilidades para a tomada de decisão das  $n$  decisões ocorrendo simultaneamente dada pelo produto da quantidade de possibilidades de cada decisão.

Como exemplo, suponha que para ir de uma cidade  $P$  a uma cidade  $Q$  seja

necessário passar pela cidade R. Para ir de P a R, há 3 estradas disponíveis. Para ir de R a Q, há dois rios disponíveis. De quantas maneiras é possível ir da cidade P à cidade Q, passando pela cidade R?

Para resolver essa questão, considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{ x \mid x \text{ é estrada que liga P e R} \}$$

$$B = \{ x \mid x \text{ é rio que liga R e Q} \}$$

Sabendo que o conjunto A possui 3 elementos (estrada 1, estrada 2, e estrada 3) e o conjunto B possui 2 elementos (rio 1 e rio 2), o total de possibilidades para ir da cidade P à cidade Q é igual a  $3 \times 2 = 6$  possibilidades.

### 2.6.2 Fatorial

Denomina-se fatorial de  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ao produto de todos os números naturais de 1 até  $n$ . Indica-se por:  $n!$ .

Essa definição é de fundamental importância pois, para o estudo de grupos ou conjuntos com grande quantidade de elementos, a notação  $n!$  pode auxiliar e simplificar o processo de contagem.

Para exemplificar, pode se propor o seguinte problema: De quantas maneiras é possível estacionar 10 carros em 10 vagas distintas de um estacionamento? A resolução do problema é baseada no Princípio Fundamental da Contagem. Para ocupar a primeira vaga no estacionamento, há 10 carros disponíveis. Para a segunda vaga do estacionamento, há 9 carros disponíveis, e assim sucessivamente até a décima vaga. Logo, a resposta para essa questão é  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , que pode ser representada por  $10!$ .

É importante destacar que  $1! = 1$  e que  $0! = 1$ . Para este último, a seguinte argumentação é válida:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

$$n! = n \cdot [(n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1], \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

$$n! = n \cdot (n - 1)!, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Logo, para  $n = 1$ :

$$1! = 1 \cdot (1 - 1)!$$

$$1 = 1 \cdot 0!$$

$0! = 1$ , o que justifica a nossa afirmação.

### 2.6.3 Permutações

Segundo Michaelis. . .(2015), permutar é o ato ou efeito de trocar, mudança de um pelo outro, misturar. Agrupamentos que podem se formar com uma quantidade definida de elementos, de modo que o agrupamento formado se diferencie dos demais pela ordem dos elementos.

Desse modo, considerando a importância da ordem entre os elementos no processo de contagem, na Matemática Básica, as questões que envolvem Permutações podem ser classificadas em 3 grupos: Permutação Simples, Permutação com Repetição e Permutação Circular.

#### a. Permutação Simples

Considere um conjunto com  $n$  elementos distintos. Para saber o total de possibilidades existentes para ordenar esses elementos, a contagem é feita do seguinte modo:

- Há  $n$  possibilidades para a escolha do primeiro elemento;
- há  $n - 1$  possibilidades para a escolha do segundo elemento;
- há  $n - 2$  possibilidades para a escolha do terceiro elemento;
- há  $n - 3$  possibilidades para a escolha do quarto elemento.

Repetindo o processo  $n$  vezes e usando o Princípio Fundamental da Contagem, conclui-se que o total de possibilidades existentes para a ordenação de  $n$  elementos distintos é dado por:

$$P(n) = n.(n - 1).(n - 2)...3.2.1 = n!, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Exemplificando, o seguinte problema é proposto: Quantas possibilidades existem para organizar 5 pessoas numa fila?

Solucionando a questão, tem-se:

- Há 5 possibilidades para a escolha da primeira pessoa;
- há 4 possibilidades para a escolha da segunda pessoa;
- há 3 possibilidades para a escolha da terceira pessoa;
- há 2 possibilidades para a escolha da quarta pessoa;
- há 1 possibilidade para a escolha da quinta e última pessoa.

Logo, a resposta do problema é dada por:

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ possibilidades.}$$

### b. Permutação com repetição

Se entre os  $n$  elementos de um conjunto existem  $a$  elementos repetidos,  $b$  elementos repetidos,  $c$  elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a!b!c!\dots}$$

A relação acima é facilmente compreendida quando pensamos nos anagramas da palavra TORTA. A definição de anagrama, de acordo com o dicionário Michaelis online, é a palavra ou frase formada com as letras de outra. No exemplo dado, a palavra TORTA possui 5 letras, dos quais duas são repetidas (há repetição da letra T). Se todas as letras fossem distintas, o total de anagramas seria dado por  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  anagramas. Porém como há repetição da letra T, esse resultado deve ser dividido por  $2!$ , pois a troca de ordem entre as “letras T” não cria um novo anagrama. Logo, nesse caso, o total de anagramas da palavra TORTA é dado por:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 60$$

Resposta: 60 anagramas.

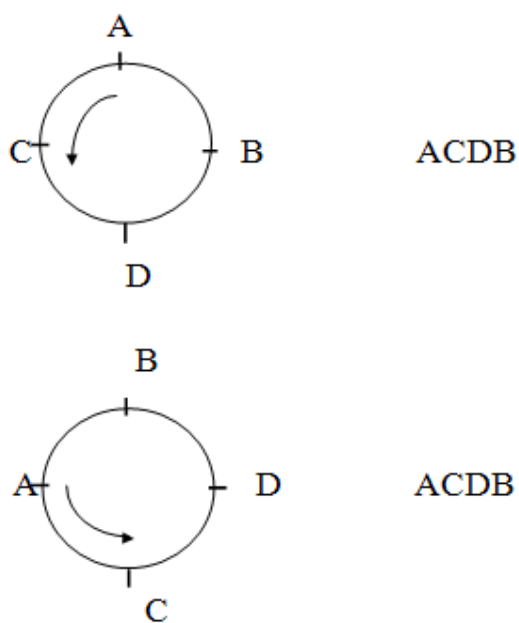
### c. Permutação Circular

O Conceito de Permutação Circular consiste em permutar elementos que estão organizados sobre um círculo. Esse tipo de permutação é um pouco diferente, pois para algumas disposições dos elementos, mesmo trocando todos eles de lugar, sua posição no círculo não se altera.

Um bom exemplo é a pensar em quantas são as possibilidades de 4 pessoas (A, B, C, D) se assentarem ao redor de uma mesa circular.

Observe as configurações abaixo:

Figura 1 – Exemplo de permutação circular



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que a configuração ACDB é única a menos de rotação, ou seja, seja girarmos o círculo no sentido anti-horário num ângulo de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , A sempre ocupará a posição ocupada anteriormente por C, C ocupará a posição de D, D ocupará a posição de B e B ocupará a posição de A. Isso resulta que C sempre estará à direita de A, D à direita de C, B à direita de D e A à direita de B. Para essa situação, têm-se 4 possibilidades de rotação (uma para cada ângulo citado acima), que na realidade representam a mesma configuração ACBD.



Tendo em vista esse raciocínio, percebe-se que o caso ACBD difere do caso ADBC, que difere do caso ABCD, e assim por diante. Portanto, para responder a questão proposta e tendo o ponto A como referencial, têm-se as seguintes configurações:

ADCB ABCD ACBD ADBC ABDC ACDB.

Logo, têm-se 6 possibilidades (configurações distintas) para 4 pessoas se assentarem numa mesa de formato circular.

Uma outra forma de resolução deve ser considerada. Sabendo que pessoas irão assentar-se à mesa, enumerando as posições de assento à mesa como 1, 2, 3, e 4 nessa ordem e considerando o sentido anti-horário, tem-se:

- Há 4 possibilidades para se escolher a primeira pessoa que ocupará a vaga 1;
- há 3 possibilidades para se escolher a segunda pessoa que ocupará a vaga 2;
- há 2 possibilidades para se escolher a terceira pessoa que ocupará a vaga 3;
- há 1 possibilidade para se escolher a quarta pessoa que ocupará a vaga 4.

Como para cada uma dessas configurações há 4 situações similares (pois representam a mesma configuração), conclui-se que a resposta do problema levantado pode ser obtida também através da seguinte forma:

$$P = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6$$

Resposta: 6 possibilidades.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, percebe-se que a permutação de  $n$  elementos organizados sobre um círculo é dada por:

$$PC = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n} = (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$$

$$\therefore PC = (n-1)!$$

sendo  $PC$  a Permutação Circular de  $n$  elementos organizados sobre o círculo.

#### 2.6.4 Arranjo Simples

São agrupamentos formados com  $p$  elementos, a partir de um conjunto de  $n$  elementos distintos, de forma que a ordem de organização desses  $p$  elementos seja importante, ou seja, dado um determinado agrupamento com  $p$  elementos, qualquer mudança na ordem desses elementos dá origem a um novo agrupamento.

Para entender esse conceito, considere o seguinte problema:

Numa corrida de rua em que há 10 atletas participando da competição, de quantas maneiras é possível compor o pódio com o primeiro e segundo colocados, sendo que o campeão e o vice-campeão da competição receberão premiações distintas?

Para solucionar essa questão, é importante recorrer ao Princípio multiplicativo.

Assim:

- Há 10 possibilidades para o vencedor da corrida;
- há 9 possibilidades para o segundo colocado.

Desse modo há  $10 \times 9 = 90$  possibilidades distintas para a composição do pódio. Note que, para solucionar o problema, é importante ressaltar que a ordem dos elementos muda a configuração do agrupamento, isto é, a troca de posições no pódio entre dois competidores muda o resultado final da corrida. Logo, a ordem dos elementos no agrupamento é importante e deve ser considerada para a solução correta da questão.

A relação algébrica que dá o número de Arranjo Simples de  $p$  elementos a partir de um conjunto de  $n$  elementos é dada por:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

### 2.6.5 Combinação Simples

São agrupamentos formados com  $p$  elementos, a partir de um conjunto de  $n$  elementos distintos, de forma que a ordem de organização desses  $p$  elementos não seja importante, ou seja, dado um determinado agrupamento com  $p$  elementos, qualquer mudança na ordem desses elementos não dá origem a um novo agrupamento.

Para entender esse conceito, considere o seguinte problema:

A partir de um grupo de 6 alunos, de quantas maneiras é possível escolher dois alunos para serem contemplados com bolsas de estudo?

Para solucionar essa questão, é importante recorrer ao princípio multiplicativo.

Assim:

- Há 6 possibilidades para a escolha do primeiro aluno contemplado com a bolsa de estudo;
- há 5 possibilidades para a escolha do segundo aluno contemplado com a bolsa de estudo.

Além disso, dado dois alunos dentre os 6 alunos, a ordem entre eles não é relevante. Considerando A e B alunos que fazem parte do conjunto dos 6 alunos, o agrupamento AB (com A sendo o primeiro escolhido e B sendo o segundo escolhido) é igual ao grupo BA (com B sendo o primeiro escolhido e A sendo o segundo escolhido). Desse modo, o número total de possibilidades para a escolha dos dois alunos bolsistas será dado por:

$$\frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Resposta: 15 possibilidades.

A relação algébrica que dá o número de Combinação Simples de  $p$  elementos a partir de um conjunto de  $n$  elementos é dada por:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

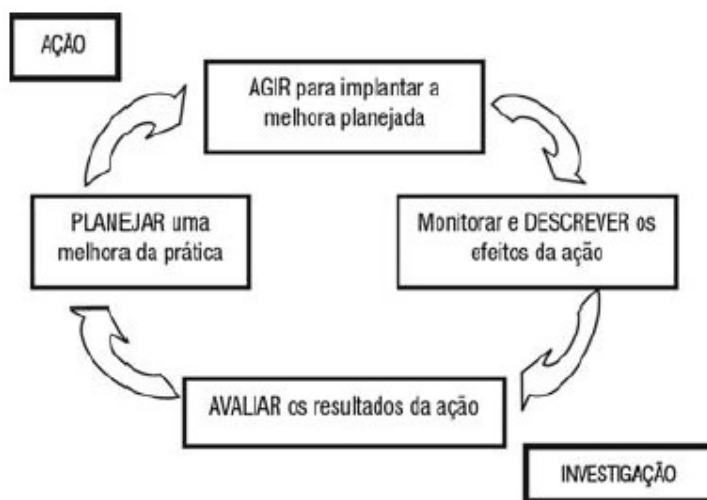
### 3 A METODOLOGIA DA PESQUISA

#### 3.1 A metodologia da pesquisa

A pergunta base do qual originou todo o estudo e investigação é: quais as contribuições que um aplicativo para *smartphone* na forma de jogo pode proporcionar ao ensino da Análise Combinatória para alunos do segundo ano do ensino médio? Para a realização desse processo investigativo e coleta de dados para a dissertação, optou-se pela utilização da pesquisa-ação. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), é um tipo especial de pesquisa, pois o pesquisador entra no ambiente a ser estudado não só para observar e compreender, mas especialmente para contribuir significativamente para mudanças que irão promover melhorias das práticas e dar mais liberdade de ação e aprendizagem aos participantes. A pesquisa-ação é um processo investigativo de intervenção em que a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa caminham juntas.

Nesta mesma linha, Tripp (2005), apresenta as fases do ciclo-básico da pesquisa-ação conforme mostra a imagem 1.

Imagem 1 – Ciclo básico da investigação-ação



Fonte: Tripp (2005, p. 446)

Observando a imagem 1, é importante pensar na pesquisa-ação dentro do processo ensino-aprendizagem nas escolas. Ela pode ajudar o pesquisador a refletir e promover

melhorias na sua própria prática pedagógica e não apenas de outros docentes. Como dito por Fiorentini e Lorenzato (2012), a pesquisa-ação “torna o participante da ação um pesquisador da sua própria prática e o pesquisador um participante que intervém nos rumos da ação, orientado pela pesquisa que realiza”.

Desse modo, com a pesquisa-ação servindo de base, esta dissertação foi desenvolvida a partir das seguintes etapas:

- Identificação das possíveis abordagens metodológicas que podem ser utilizadas no ensino de Análise Combinatória.
- Criação das atividades relativas à Análise Combinatória e organização de uma sequência didática utilizando essas atividades.
- Análise e verificação da plataforma de programação adequada para a criação de um aplicativo para *smartphones* utilizando a sequência didática criada.
- Criação de um aplicativo para *smartphone*, na forma de jogo (específico para *Android*) com atividades interativas orientadas como parte de uma sequência didática.
- Aplicação do jogo criado para alunos do segundo ano do Ensino Médio da Escola Educação Criativa.
- Elaboração e aplicação de um questionário para alunos que participaram da pesquisa com o intuito de perceber as contribuições aplicativo na construção dos conceitos e na contextualização, as dificuldades encontradas, sugestões de melhorias, etc.
- Reformulação do aplicativo, de acordo com o resultado do questionário respondido pelos alunos.

A partir disso, vencida a primeira etapa de análise das possíveis abordagens metodológicas que poderiam ser utilizadas no ensino de Análise Combinatória, foi iniciado o processo de criação da sequência didática e do aplicativo.

## 3.2 A criação da sequência didática e do aplicativo

### 3.2.1 A criação da sequência didática

A questão fundamental para esse instante inicial foi elaborar uma série de desafios em problemas envolvendo aspectos de combinatória que, organizados de modo adequado, poderiam gerar uma sequência didática que fosse interessante e consistente. Num segundo momento, seria a elaboração de um aplicativo em forma de jogo que reproduzisse essas sequências de uma maneira mais atraente.

É importante destacar aqui que a intenção inicial para a criação de cada desafio era de que cada aluno tivesse condições de resolvê-lo, sem a necessidade de uma visão formal e teórica sobre Análise Combinatória e as relações matemáticas envolvidas. O objetivo principal era que, de forma atrativa e investigativa, os alunos aprendessem Análise Combinatória sem a memorização e uso exagerado das fórmulas matemáticas, isto é, priorizar o raciocínio e a investigação em detrimento de um processo de memorização e resolução mecânica dos desafios.

Tentando seguir esses princípios, a sequência didática foi construída, contendo 8 desafios, que foram organizados em ordem crescente de grau de dificuldade. Os dois primeiros desafios tratam de problemas básicos envolvendo Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. O terceiro desafio aborda conceitos envolvidos em Permutações Simples e com repetição, apresentando questões sobre anagramas. O quarto, quinto e o sexto desafios já exploram a Combinação Simples e Arranjo Simples, enquanto o sétimo desafio aborda a Permutação Circular e o último trata de uma questão sobre Combinação Simples envolvendo Geometria Plana.

### 3.2.2 O desenvolvimento do aplicativo: a criação do jogo

O próximo passo foi a criação de um aplicativo para Android, no formato de um jogo. Essa etapa se iniciou no final do mês de maio de 2016, através de uma reunião com um grupo de alunos do curso de Sistemas de Informação da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP): Aline Marina Lopes, Camila Ferreira, Davidson Esteves Nunes e Maria Luísa Arcanjo Bastos. Nessa reunião, foi feita uma parceria desses alunos com o professor-

pesquisador, autor dessa dissertação, para a elaboração desse aplicativo.

Após algumas reuniões, foi definido o *Android Studio* como o ambiente de programação que seria utilizada para a criação do aplicativo. A proposta inicial seria a utilização do “Scratch” ou do “Appinventor”, ambientes de programação visual, mas a tentativa em utilizar esses dois recursos não foi bem sucedida, devido a algumas particularidades apresentadas por essas linguagens que dificultariam a criação do aplicativo dentro dos objetivos traçados. A intenção principal era criar um recurso didático informatizado que pudesse atrair o aluno e contribuir de modo eficaz para o seu aprendizado.

Segundo Silva (2015), *Android Studio* é uma plataforma aberta voltada para dispositivos móveis que foi desenvolvida pela Google, mas atualmente é mantida pela Open Handset Alliance (OHA). Todas as aplicações para o *Android* desenvolvidas por essa plataforma foram criadas com a linguagem Java, a qual facilita sua programação, quer seja em Java ou em outras linguagens, tais como C++ e C#.

Sendo assim, os trabalhos começaram com o objetivo de aplicar e testar o jogo, no mês de agosto de 2016, em encontros na forma de aula curricular de 1 hora e 40 minutos para alunos do segundo ano do Ensino Médio da escola Educação Criativa, localizada no município de Ipatinga, MG.

Ao final do mês de julho, a equipe percebeu que o aplicativo não estaria totalmente concluído dentro do cronograma proposto. Além disso, não seria possível aplicá-lo dentro de um momento de aula após o mês de agosto, pois isso sairia do planejamento anual do conteúdo programático do segundo ano do Ensino Médio estipulado pela escola. É importante destacar que a escola Educação Criativa não trabalha com livro didático e sim com apostila modular. O fato de o tema Análise Combinatória estar proposto dentro da apostila modular para ser trabalhado no mês de agosto inviabilizou a realização do trabalho numa data posterior à data inicialmente planejada. Para resolver essa situação, optou-se por desenvolver um aplicativo mais simples, de modo que pudesse ser utilizado no mês de agosto e que atendesse de maneira satisfatória o aprendizado dos alunos. Diante dessa nova perspectiva, a primeira versão do aplicativo ficou pronta no dia 16 de agosto de 2016 e, após alguns pequenos ajustes, começou a ser testado efetivamente no momento de aula com os alunos no dia 22 de agosto de 2016, experiência essa que será relatada posteriormente.

Até o momento do teste do jogo em sala de aula, o aplicativo ainda não possuía um nome. Depois de algumas sugestões e discussões, o nome “Foca na Comb” foi adotado e



houve uma aceitação satisfatória pelos alunos. Segundo os próprios estudantes, caso o aplicativo estivesse disponível para *download*, eles estariam dispostos a obter o aplicativo, pois o nome é bem atraente. No apêndice B desta dissertação estão disponíveis algumas telas do “Foca na Comb”.

Outro fato importante a ser citado foi a necessidade de aplicação do Termo de Consentimento Livre Esclarecido, termo que garante a participação de cada estudante na pesquisa. Porém, nem todos os alunos entregaram os termos devidamente preenchidos e assinados. Com isso, dos 141 alunos do segundo ano do ensino médio da Escola Educação Criativa, 73 participaram da pesquisa. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para alunos e responsáveis estão nos anexos desta dissertação.

Importante também destacar que, após a realização da pesquisa, cada aluno participante respondeu a um questionário elaborado pelo autor desta dissertação, com o objetivo de evidenciar a experiência vivida por eles com o uso do aplicativo durante a realização dos encontros.



## 4 PESQUISA, ANÁLISE E RESULTADOS

### 4.1 Desenvolvimento da Pesquisa

Após o trabalho de revisão bibliográfica, organização e planejamento da pesquisa, o aplicativo pôde ser testado. Todo o enredo descrito a seguir foi desenvolvido em três turmas do segundo ano do Ensino Médio, nos dias 8, 22 e 29 de agosto e 5 e 12 de setembro de 2016, na Escola Educação Criativa, localizada na cidade de Ipatinga, estado de Minas Gerais.

O trabalho elaborado na forma de pesquisa-ação, tem como objetivo criar um novo recurso didático que contribua para o processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula.

É importante destacar nesse momento que o assunto abordado nessas aulas, com duração de 1h 40 min cada, não havia sido trabalhado em sala de aula nos anos anteriores. O aplicativo é um jogo nomeado “Foca na Comb”, composto de desafios, com a organização proposta a seguir:

Tabela 1 – Resumo dos desafios e objetivos

Desafio	Título	Objetivos
I	Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo	Criar estratégias para agrupar elementos, com auxílio de esquemas e da “árvore de possibilidades”, para que os alunos percebam a adição e a multiplicação como ferramentas de grande utilidade dentro do processo de contagem. Com isso, associa-se o “ou” para o “Princípio Aditivo” e o “e” para o “Princípio Multiplicativo”.
II	Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo	Através de um desafio mais elaborado, fixar os conceitos associados ao desafio I, criar estratégias para agrupar elementos, com auxílio de esquemas e da “árvore de possibilidades”, para que os alunos percebam a adição e a multiplicação como ferramentas de grande utilidade dentro do processo de contagem. Com isso, associa-se o “ou” para o “Princípio Aditivo” e o “e” para o “Princípio Multiplicativo”.

Desafio	Título	Objetivos
III	Permutação Simples e Permutação com Repetição	Introduzir o conceito de permutação como troca aleatória de posição de elementos, mostrar as diferenças quando os elementos são todos distintos e quando aparecem elementos iguais dentro de um agrupamento e como criar estratégias para contar o número total de configurações que podem ser criadas a partir dessa troca aleatória de posição de elementos.
IV	Arranjo Simples e Combinação Simples	Perceber que, tendo um grupo de $n$ elementos, é possível reagrupar esses elementos em subgrupos com $p$ elementos, com $p$ menor ou igual a $n$ . Mostrar quando a ordem dos elementos deve ser considerada importante ou não, dentro dos novos agrupamentos. Criar estratégias de resolução, sem mencionar as fórmulas matemáticas que envolvem os conceitos de arranjo simples e combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.
V	Arranjo Simples e Combinação Simples	Perceber que, tendo um grupo de $n$ elementos, é possível reagrupar esses elementos em subgrupos com $p$ elementos, com $p$ menor ou igual a $n$ . Mostrar quando a ordem dos elementos deve ser considerada importante ou não, dentro dos novos agrupamentos. Criar estratégias de resolução, sem mencionar as fórmulas matemáticas que envolvem os conceitos de arranjo simples e combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.
VII	Permutação Circular	Mostrar um novo caso de Permutação, onde a disposição de $n$ elementos dentro de um grupo devem estar organizados em forma de círculo. Criar estratégias de resolução, sem mencionar a fórmula matemática que envolve o conceito Permutação Circular, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.

Desafio	Título	Objetivos
VIII	Combinação Simples	Através de um desafio mais elaborado, fixar os conceitos desenvolvidos nos desafios IV, V e VI, especialmente em situações-problema quando a ordem dos elementos não é importante dentro do agrupamento. Criar estratégias de resolução, sem mencionar a fórmula matemática que envolve o conceito combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

Estes são os desafios do jogo:

**DESAFIO I (Princípio Multiplicativo / Princípio Aditivo)** - O diretor de uma escola deseja escolher um modelo de uniforme para seus alunos. Para isso, tem disponível 4 modelos de camisas e 2 modelos de bermudas para a composição do uniforme escolar

- (a) Ajude o diretor a elaborar um esquema ilustrativo que represente o total de possibilidades de uniformes que podem ser obtidos.
- (b) Baseado no esquema montado, diga qual é o total de possibilidades de uniformes que a escola poderá utilizar.
- (c) Agora, resolva esse problema por meio de cálculos! Use o campo abaixo e desenvolva seu raciocínio.

**DESAFIO II (Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo)** - Uma determinada lanchonete apresenta a promoção de montar o seu lanche por um preço especial. O lanche é composto por um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. Para isso, a lanchonete apresenta 3 opções de sanduíche, 2 opções de bebida e 2 opções de sobremesa. Diante dessa situação:

- (a) Elabore um esquema ilustrativo que represente o total de lanches que podem ser montados.
- (b) Baseado no esquema montado, qual é o total de possibilidades de lanches que a lanchonete disponibiliza.

- (c) Resolva esse problema através de cálculos. Use o campo abaixo e desenvolva seu raciocínio!

**DESAFIO III (Permutação Simples e Permutação com Repetição)** - Você sabe o que significa a palavra “anagrama”? De acordo com o dicionário Aulete digital, “anagrama” é a palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Por exemplo, para a palavra “amor”, podemos criar o anagrama “roma” ou “omar”, dentre outros.

- (a) Pensando na palavra FOCA, diga o número total de anagramas que podem ser formados com essa palavra. Se achar necessário, anote todos os anagramas que você encontrar num papel. Digite o resultado no campo abaixo!
- (b) É possível encontrar o número total de anagramas de uma determinada palavra sem a necessidade de contagem dos anagramas criados. Voltando à palavra FOCA, represente seu raciocínio matematicamente, através de cálculos e números. Cada lacuna representa o número de possibilidades para escolha de cada letra!
- (c) Colocando os anagramas em ordem alfabética, qual a posição em que se encontra o anagrama OFAC? Responda essa pergunta sem fazer a contagem. Como você expressa seu raciocínio através de cálculos?
- (d) Agora, pense na palavra FACA; Diga o número total de anagramas que podem ser formados com essa palavra. Se achar necessário, anote todos os anagramas que você encontrar num papel. Digite o resultado no campo abaixo!
- (e) Você percebe diferenças na análise da palavra FACA em relação a palavra FOCA? Anote-as e discuta com seus colegas!
- (f) Calcule o total de anagramas da palavra FACA, sem precisar anotá-las! Lembre-se de que as 4 primeiras lacunas representam o número de possibilidades para escolha de cada letra!

**DESAFIO IV (Combinação Simples e Arranjo Simples)** Suponha que numa determinada escola há três turmas de segundo ano do ensino médio. O professor de educação física dessa escola pretende realizar um torneio de futsal com a participação

dessas três turmas, onde cada turma deve formar duas equipes para a disputa do torneio.

O regulamento do torneio consiste em:

- (i) Todos os times jogam contra todos uma única vez;
- (ii) Os dois times que somarem mais pontos têm o direito de disputar a final do torneio;
- (iii) O time que vencer a final será declarado campeão.

Além disso, a pontuação dos resultados dos jogos consiste em:

- Vitória: 3 pontos;
- Empate: 1 ponto;
- Derrota: 0 ponto.

As equipes formadas pelas turmas I, II e III serão:

- Turma I - Equipes A e B;
- Turma II - Equipes C e D;
- Turma III - Equipes E e F.

Vamos ajudar o professor de educação física na organização do torneio?

- (a) Se pensarmos nas possibilidades de premiação para o primeiro e segundo colocado desse campeonato, quantas possibilidades existem para montar o pódio com o campeão e vice-campeão, sabendo que todos os times têm as mesmas possibilidades de chegar à final? Represente o seu raciocínio por meio de cálculos!

- (b) Como ficará a tabela com todos os confrontos (partidas) desse torneio? Elabore um esquema para representar esses confrontos. Sugiro que anote todos os confrontos num papel, para você não os esquecer!
- (c) Agora, diga qual é o total de partidas realizadas antes da partida final do torneio.
- (d) Expresse através de cálculos um raciocínio para responder à questão anterior!
- (e) Quais são as semelhanças e diferenças na resolução dos itens (c) e (d)? Você consegue identificar alguma? Discuta com seus colegas e anote essas observações para não esquecer!

**DESAFIO V (Arranjo Simples e Combinação Simples)** Suponha que 10 alunos de uma escola irão concorrer ao sorteio de 4 bolsas de estudos no exterior, válidas para o período de um ano. Pensando nessa situação e com base na nossa caminhada até agora, temos um novo desafio para você:

- (a) De quantas maneiras podemos formar o grupo com os 4 alunos sorteados?
- (b) Supondo que o primeiro sorteado terá 100% da bolsa, o segundo sorteado 75%, o terceiro sorteado 50% e o quarto sorteado, 25%, qual o total de possibilidades para a escolha dos 4 alunos sorteados?
- (c) Quais são as semelhanças e diferenças na resolução dos itens (a) e (b)? Você consegue identificar alguma? Discuta com seus colegas e anote essas observações para não as esquecer!

**DESAFIO VI (Combinação Simples)** Para uma turma de 20 alunos do segundo ano do ensino médio, um professor de matemática decidiu dividir a turma em 5 grupos de estudo. Diante dessa situação, você é capaz de responder os próximos desafios? Ajude o professor a organizar a turma em pequenos grupos!

- (a) Quantos grupos de estudos distintos podem ser formados com esses 20 alunos?



Suponha ainda que Renato, Rafaela, Eduardo e Jéssica são alunos dessa turma.

- (b) Se Eduardo e Rafaela devem estar sempre juntos na composição de um determinado grupo, quantos grupos podem ser formados tendo esses dois alunos presentes?
- (c) Outra questão pode ser levantada. Sabendo que Renato e Jéssica não podem estar juntos num determinado grupo, quantas possibilidades existem para a montagem desse grupo, sabendo que esses dois alunos não estarão juntos? Desenvolva seu raciocínio num papel e digite a resposta no campo a seguir!
- (d) Quantos grupos podem ser formados tendo em vista que, considerando os alunos Renato e Eduardo, pelo menos um deles esteja presente no grupo? Desenvolva seu raciocínio num papel e digite a resposta no campo a seguir!

**DESAFIO VII (Permutação Circular)** Considere uma mesa circular com 4 lugares. Nessa mesa, há uma cadeira azul e três cadeiras verdes. Tendo a cadeira azul como referência, de quantas maneiras podem-se organizar 4 pessoas assentadas nesses lugares?

**DESAFIO VIII (Combinação Simples)** Considere dois segmentos de retas paralelos, AB e CD. Considere ainda um total de 10 pontos sobre esses segmentos de reta, sendo 6 pontos pertencentes ao segmento de reta AB e 4 pontos ao segmento de reta CD. Desse modo, quantos triângulos podem ser formados considerando os pontos nessa disposição? (Importante: Os pontos das extremidades A, B, C, D de cada segmento podem ser incluídos na formação dos triângulos!).

Após a elaboração dos desafios e montagem do aplicativo, no dia 8 de agosto de 2016, data do primeiro encontro, o professor-pesquisador introduziu o conceito de Fatorial, com exemplos e exercícios de fixação, focados em expressões numéricas e equações envolvendo esse novo conceito. Nenhum problema envolvendo contagem foi mencionado ou abordado. O objetivo principal nesse primeiro contato foi dar aos alunos alguma ferramenta, que poderia ser utilizada na resolução de problemas sobre Análise Combinatória. Ao final da aula, os alunos anotaram seus contatos numa lista (e-mail e número de telefone celular) para que o professor-pesquisador pudesse disponibilizar o aplicativo “Foca na Comb” para que eles pudessem fazer o *download*. Foi avisado nesse dia, em todas as turmas, que o aplicativo seria utilizado no próximo encontro.

No encontro seguinte, realizado no dia 22 de agosto de 2016, também com duração de 1 hora e 40 minutos em cada uma das turmas, o professor-pesquisador separou os alunos de cada turma em pequenos grupos, composto em média por cinco integrantes. O aplicativo não estava totalmente pronto, mas o seu estágio atual de desenvolvimento permitia sua utilização dentro do processo de ensino-aprendizagem. Todos os alunos que possuíam o sistema operacional *Android* nos celulares haviam baixado o aplicativo antes do encontro. Foi criado um grupo no Telegram (aplicativo usado para chat de conversa online, disponível para smartphones), onde o “Foca na Comb” foi disponibilizado para *download*.

Os grupos não tiveram tamanhos uniformes devido ao fato de alguns alunos não possuírem celulares com sistema operacional Android, impossibilitando-os de terem acesso ao aplicativo. Dessa maneira, o professor - pesquisador propôs para cada grupo a discussão e a resolução dos três primeiros desafios do aplicativo, sem o auxílio do professor. O professor se limitou a observar o trabalho dos grupos, fazer anotações pertinentes do processo e registrar o momento com algumas fotos.

Para a discussão entre os integrantes dos grupos foi proposto um tempo aproximado de 30 minutos e esse tempo foi suficiente para a que todos fizessem a conclusão. A partir desse momento, foi promovida uma discussão com toda a turma reunida, sendo o professor-pesquisador o moderador dessa discussão, em que cada grupo apresentou sua estratégia e linha de raciocínio para resolver cada desafio. Esse momento foi registrado em áudio. Todos os grupos das três turmas conseguiram concluir com êxito a resolução dos três desafios, sem a necessidade da intervenção do professor.

É importante salientar que os alunos não conheciam os termos, nem os significados e conceitos ligados aos três primeiros desafios que abordavam o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo e Permutação Simples e Permutação com repetição, respectivamente. Os conceitos e definições ligados a esses desafios só foram apresentados aos alunos no momento da discussão moderada pelo professor-pesquisador. Todos os alunos participaram conjuntamente da discussão, fazendo perguntas sobre o conteúdo e, a partir de suas elucidações, faziam novas propostas de resolução dos desafios. Após esse momento, o professor propôs algumas questões, baseadas nos temas trabalhados no encontro, para que os alunos pudessem pensar e resolver individualmente durante a semana. Essas questões seriam discutidas com toda a turma reunida no próximo encontro.

No terceiro encontro, realizado no dia 29 de agosto de 2016, a discussão e correção

dos problemas deixados para os alunos resolverem durante a semana foi realizada. O intuito foi fixar os conceitos abordados no encontro anterior.

Após esse primeiro momento, a turma foi novamente organizada em pequenos grupos, conforme a foto 1, para a resolução de dois novos desafios, sendo estimado um tempo de aproximadamente 20 minutos para que os grupos pudessem discutir e resolvê-los. O aplicativo “Foca na Comb” foi utilizado por meio dos desafios V e VII envolvendo

Combinações, Arranjos e Permutações Circulares para que os alunos tentassem resolvê-los, sem o conhecimento desses termos e conceitos ligados a eles e sem o auxílio direto e efetivo do professor-pesquisador. Assim, esse tempo foi suficiente para que todos os grupos em todas as turmas pudessem desenvolver o trabalho proposto.

Foto 1 – Alunos em sala de aula



Fonte: Acervo do autor

Analogamente ao segundo encontro, o professor não realizou intervenção direta para ajudar os alunos na resolução dos desafios, registrando apenas suas observações e fotos. Logo após o tempo determinado, foi feita uma discussão moderada pelo professor envolvendo todos os grupos. Nessa discussão, os conceitos sobre Combinação Simples, Arranjo Simples e Permutação Circular foram introduzidos. Ao final, o professor propôs novas questões relacionadas a esses temas, para que os alunos pudessem pensar durante a semana, com o intuito de promover um novo debate no início do próximo encontro.

Da mesma forma que nos encontros anteriores, os conceitos de Princípio Aditivo e Multiplicativo, Permutações, Combinações e Arranjos foram introduzidos, porém as

fórmulas (relações matemáticas) de Combinação Simples, Arranjo Simples, Permutações Simples, com repetição e Circular não foram mencionadas. No primeiro, segundo e terceiro encontros, as resoluções dos desafios foram feitas sem a utilização dessas fórmulas, devido ao fato de os alunos não as conhecer e como já foi dito, nenhuma abordagem relacionadas a elas foi feita pelo professor-pesquisador.

No penúltimo encontro, realizado no dia 5 de setembro de 2016, depois da retomada e discussão sobre as questões propostas pelo professor ao final do encontro anterior, foram introduzidas as fórmulas (relações matemáticas) de Combinação Simples, Arranjo Simples, Permutações Simples, com repetição e Circular o professor-pesquisador resolveu os desafios III, V e VII propostos no aplicativo “Foca na Comb” usando essas relações, com objetivo de mostrar aos alunos que existem formas variadas de chegar à mesma solução dos desafios, por diferentes caminhos. Depois desse momento, novas questões foram propostas para que os alunos pensassem durante a semana, até a data do próximo e último encontro sobre Análise Combinatória e problemas envolvendo contagem.

Finalmente, no último encontro, realizado no dia 12 de setembro de 2016, foram retomadas as discussões dos encontros anteriores e foi traçado um esquema ligando esses novos conceitos. Ao final desse último encontro foi entregue um questionário aos alunos participantes da pesquisa, com o intuito de conhecer a percepção de cada um sobre todo o processo de ensino-aprendizagem desenvolvido nos encontros. , além disso, foi solicitado que eles avaliassem a funcionalidade e a contribuição para o aprendizado de problemas relacionados à contagem do aplicativo “Foca na Comb”.

Posteriormente aos encontros, algumas melhorias no aplicativo foram propostas pelos alunos. Foram acatadas e realizadas as mudanças e adaptações necessárias no aplicativo e, no início do mês de outubro de 2016, o “Foca na Comb” foi novamente disponibilizado (por meio da lista de contatos dos alunos) para que os estudantes envolvidos na pesquisa pudessem testá-lo novamente. O produto, com esses desafios e o questionário, encontra-se no apêndice desta dissertação.

## **4.2 Análise dos Resultados**

Fizeram-se as análises dos dados gerados pelas anotações e gravações de áudio feitas pelo professor-pesquisador, os quais foram coletados nos encontros de agosto e setembro de 2016, bem como dos questionários aplicados aos alunos envolvidos nessa

pesquisa.

O segundo ano do Ensino Médio era composto por um total de 141 alunos, mas apenas 73 alunos participaram efetivamente da pesquisa por terem apresentado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchido e assinado. O restante dos alunos, apesar de não apresentarem o termo de autorização para a participação do trabalho por diversos motivos, tais como esquecimento para entregar, ausência nos dias dos encontros, não quiseram participar da pesquisa, entre outros, puderam participar ativamente das aulas juntamente com os colegas envolvidos no projeto, porém os dados gerados por eles não foram contabilizados nos resultados apresentados nesse texto. Dos 73 alunos participantes, 28 pertencem à turma I, 25 à turma II e 20 alunos pertencem à turma III.

Na análise da transcrição dos áudios, ficou destacada a iniciativa apresentada pelos alunos para resolver os desafios, mesmo que esse fato não tenha garantido que eles tenham resolvido todos os desafios corretamente. Erros e acertos fizeram parte do processo. Os alunos desenvolveram estratégias próprias para chegar à solução de cada desafio proposto no aplicativo, por meio da discussão em grupo. Na resolução dos desafios I, II e III do “Foca na Comb”, o professor pesquisador não fez qualquer tipo de interferência no trabalho dos grupos. Nas três turmas do segundo ano onde os encontros foram realizados, foi perceptível o desejo de resolver cada etapa de cada desafio sem a ajuda do professor. No encontro realizado onde foram propostos os desafios V e VII do aplicativo “Foca na Comb”, devido ao fato de serem problemas mais elaborados em relação aos desafios do encontro anterior, algumas perguntas foram feitas ao professor-pesquisador, porém ele não as respondia diretamente e sim com outra pergunta ou com uma questão investigativa que iria motivá-los a pensar um pouco mais ou promover a reflexão em grupo. Como os desafios V e VII tratam de Combinação Simples e Arranjo Simples e Permutação Circular, as discussões entre os grupos foram bem mais calorosas do que as discussões feitas nos desafios I, II e III, que tratam sobre problemas básicos de Princípio Aditivo e Multiplicativo e Permutações Simples e com Repetição.

Outro importante destaque, nessa análise, é a descoberta de novos conceitos promovida pela discussão em grupo. Isso ficou muito evidente no debate entre os grupos e na discussão geral com todos os grupos. Como exemplo, pode-se citar o desafio III, que propõe descobrir o total de anagramas da palavra FACA e FOCA. Na discussão promovida em cada grupo, os próprios alunos concluíram que  $4!$  é o total de anagramas da palavra

FOCA. Já a palavra FACA possui 12 anagramas, que é  $4!/2!$ , total de letras que possui a palavra dividido pelo total de repetições da letra A. Outro exemplo curioso foi observado na resolução do desafio V. Nos itens a e b desse desafio, enquanto pensavam e discutiam como resolver cada item. Foi observado, na maioria dos grupos, que no item (a), para resolver o problema, a mudança da ordem entre os elementos dentro de um determinado grupo não era importante, isto é, o fato de sortear os mesmos quatro elementos em ordem diferentes não cria um novo grupo de contemplados com a bolsa de estudos. Por outro lado, no item (b), a situação muda, pois dependendo da ordem do sorteio, cada sorteado é premiado com uma porcentagem diferente da bolsa de estudos, assim, tem-se que a ordem de sorteio entre os elementos de um determinado grupo é importante. Mesmo sem saber, os alunos haviam descoberto por meio da discussão em grupo e da investigação, uma das principais diferenças entre Combinação Simples e Arranjo Simples, como também no caso dos anagramas da palavra FACA e FOCA, em que ficou estabelecida a diferença básica entre Permutação Simples e a Permutação com Repetição.

É curioso destacar que em alguns momentos, observou-se que a discussão não se limitou apenas entre os integrantes de um mesmo grupo, pois ela foi observada também entre os grupos. Isso não foi interrompido pelo professor-pesquisador, pois, apesar de alguns alunos estarem interessados em apenas saber se o outro grupo havia resolvido os desafios, a maioria dos grupos estava interessada em saber como cada um havia pensado e faziam comparação entre as linhas de raciocínio utilizadas. Para os alunos que apenas queriam saber as respostas dos desafios, o professor os motivou e estimulou a pensarem e a discutirem cada desafio com o seu respectivo grupo.

Durante os encontros, alguns problemas de funcionalidade foram identificados no aplicativo, como por exemplo, alguns celulares não conseguiam iniciar o jogo devido à versão do sistema operacional *Android* onde o aplicativo foi instalado ou o acesso negado no desafio VI. Mesmo com esses problemas e algumas limitações, o jogo atraiu a atenção dos alunos e nenhuma dessas questões atrapalhou o andamento da pesquisa.

Com a conclusão do aplicativo no início de outubro de 2016, ele foi disponibilizado novamente (por meio da lista de contatos) para que os alunos pudessem testá-lo, agora com as devidas correções e melhorias.

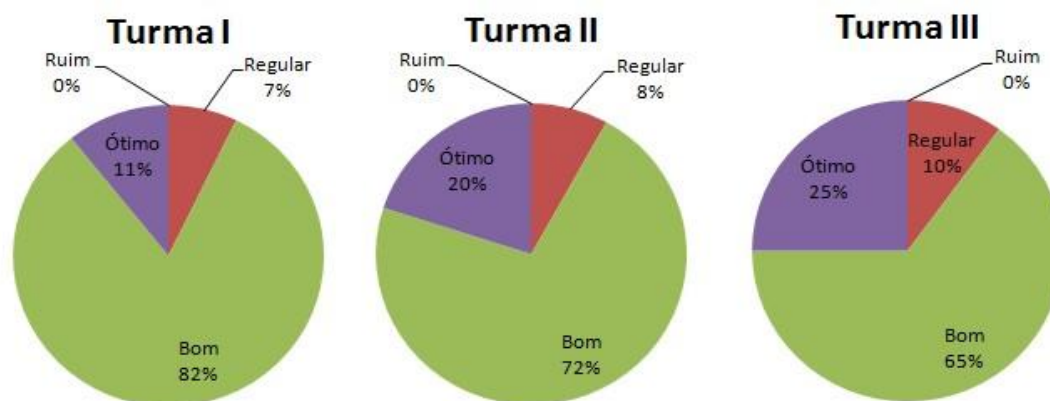
Vale a pena relatar o momento de discussão entre os grupos, moderada pelo professor-pesquisador em que várias perguntas interessantes surgiram, como por exemplo, um determinado aluno, baseado no desafio II, item (d), fez a seguinte pergunta: “E se as

opções do pacote 1 pudessem ser misturadas com as opções do pacote 2? Então, quantas opções de lanche, escolhendo uma opção de sanduíche, uma opção de bebida e uma opção de sobremesa poderiam ser montadas?” Alguns instantes depois, um integrante de outro grupo respondeu: “360 é a resposta!” O professor-pesquisar perguntou: “Como você chegou a esse resultado?” Ele respondeu: “Como é possível misturar as opções do pacote 1 com o pacote 2, para montar o lanche, teremos 9 opções de sanduíches, 8 opções de bebida e 5 opções de sobremesa, isto é  $9 \cdot 8 \cdot 5 = 360$ ”. O professor perguntou para a turma: “A resposta está correta?” A turma respondeu: “Sim!” Nesse momento, ficou claro que os alunos participantes desse diálogo haviam compreendido com clareza o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo, pois não foi necessária a intervenção do professor para responder a pergunta feita pelo aluno. Momentos como esse ocorreram também nas outras duas turmas. O exemplo acima foi citado para mostrar o envolvimento dos alunos no diálogo. A turma estava empenhada em resolver os desafios e responder os questionamentos que iam surgindo. Isso ficou marcante nos encontros.

O primeiro item do questionário trouxe a seguinte pergunta: “Como você avalia a funcionalidade do aplicativo?”

O Gráfico 1 apresenta a respostas dos participantes por turma para esta pergunta.

Gráfico 1 – Respostas das turmas para a questão 1



Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

Apesar de o aplicativo não estar completamente ajustado em relação às suas funcionalidades, a maioria dos alunos em todas as turmas consideraram que ele estava em condições satisfatórias para ser utilizado naquele momento. A falta de ajuste pode ser percebido nas respostas dadas pelos alunos apresentadas na foto 2.

Foto 2 – Respostas de alguns alunos para a questão 1

1) Como você avalia a funcionalidade do aplicativo?  
 Ruim     regular     Bom     Ótimo  
 OBS: Existem alguns bugs que atrapalham o funcionamento

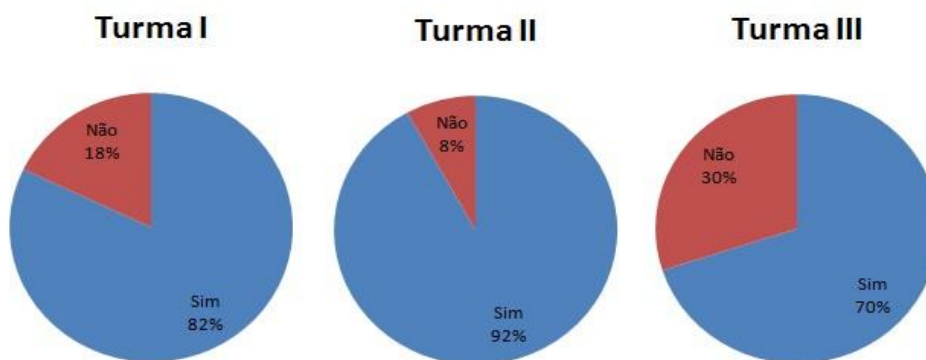
1) Como você avalia a funcionalidade do aplicativo?  
 Ruim     regular     Bom     Ótimo  
 OBS: algumas "fases" travavam e o layout pode ser aprimorado

1) Como você avalia a funcionalidade do aplicativo?  
 Ruim     regular     Bom     Ótimo  
 OBS: Tive problemas com a atualização (o aplicativo abriu, mas dava erro logo depois) e tive que ficar com a versão antiga.

Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

As telas, imagens e o nível dos desafios também foram avaliados. A questão 2 do questionário era referente à satisfação com relação a esses quesitos. As respostas dadas pelos alunos de cada turma são apresentadas na Gráfico 2.

Gráfico 2 – Respostas da questão 2



Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa



Foi notória a interação dos alunos com o aplicativo durante a realização dos desafios. A maioria deles, nas três turmas participantes da pesquisa, mostrou envolvimento, atenção e determinação para vencer cada etapa, isto é, o aplicativo atraiu a atenção e a curiosidade dos alunos. Além dos gráficos que apresentaram essa realidade, isso pode ser visto em algumas respostas apresentadas por eles no questionário (foto 3). Sugestões também foram feitas, com o objetivo de melhorar o jogo.

Foto 3 – Destaques de resposta à questão 2

2) As telas, imagens e os desafios são atrativos?

Sim    ( ) Não

Porque? Porque dá mais do jogo que desperta interesse e os desafios são telas que criam a dificuldade a cada nível.

---

2) As telas, imagens e os desafios são atrativos?

Sim    ( ) Não

Porque? a resolução das questões não estão verticais e coloridas, o que facilita o aprendizado.

---

2) As telas, imagens e os desafios são atrativos?

( ) Sim    (x) Não

Porque? O fundo do aplicativo deveria possuir mais imagens ou atividades que chamem a atenção.

---

2) As telas, imagens e os desafios são atrativos?

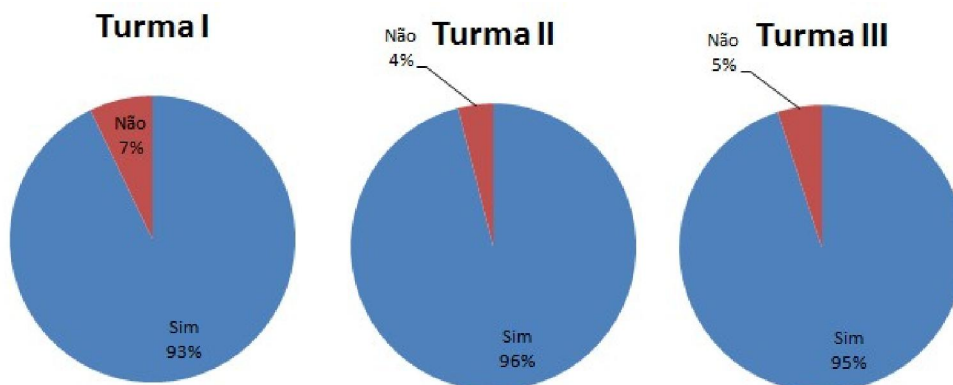
Sim    ( ) Não

Porque? Finalmente nos desafios, e não deixamos passar pela resposta.

Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

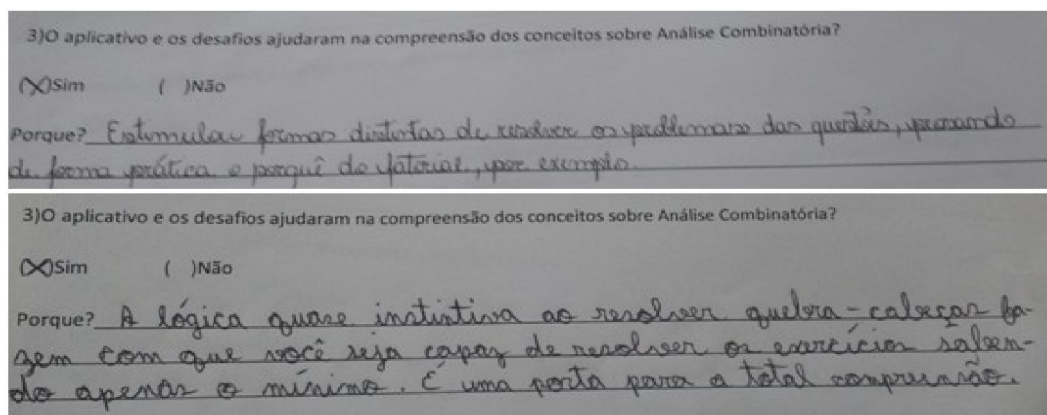
A Questão 3 do questionário trouxe a seguinte pergunta: “O aplicativo e os desafios ajudaram na compreensão dos conceitos sobre Análise Combinatória?” O objetivo nesse tópico foi perceber se os alunos haviam compreendido os conceitos básicos teóricos por meio do “Foca na Comb” e se esses conceitos ajudaram a desenvolver novos caminhos para resolver os desafios e problemas propostos. Como não era necessário se identificar no preenchimento do questionário, foi pedido aos alunos que respondessem com sinceridade e seriedade. O Gráfico 3 apresenta as respostas dadas pelos alunos de cada turma e a foto 4 mostra algumas dessas respostas a seguir.

Gráfico 3 – Respostas da questão 3



Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

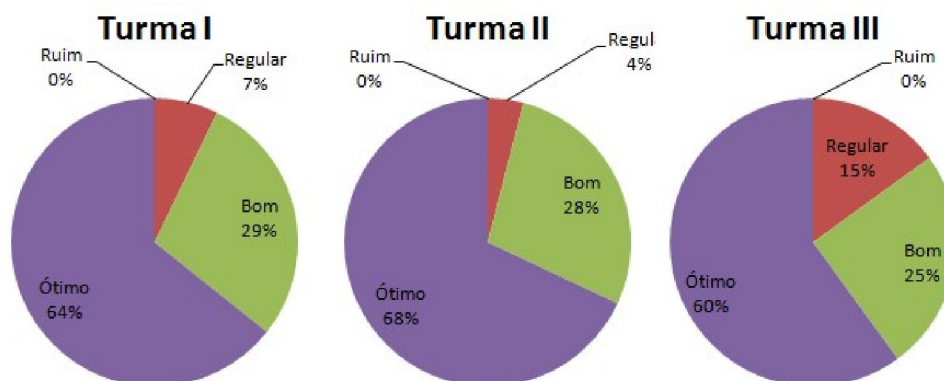
Foto 4 - Destaques de resposta à questão 3



Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

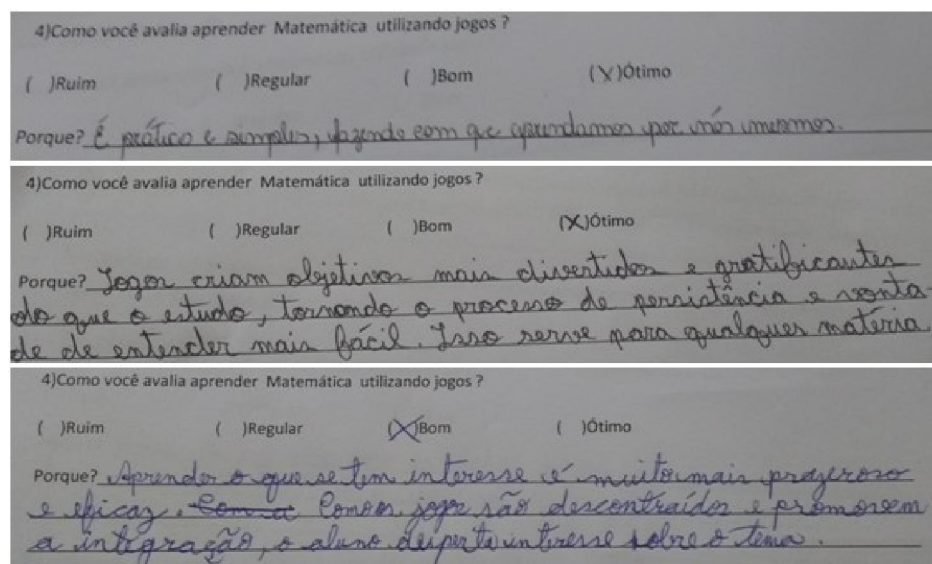
No quarto item do questionário, foi perguntado como cada aluno avalia a oportunidade de aprender Matemática por meio de jogos. Foi interessante perceber através das respostas deles como um determinado jogo, quando utilizado de modo adequado, pode aguçar a curiosidade e contribuir para a construção do conhecimento. Uma porcentagem pequena dos alunos não vê como benéfica a utilização do jogo para o aprendizado de Matemática, porém a maioria dos participantes da pesquisa acredita que a parceria “Matemática - jogos” pode proporcionar experiências positivas no processo de ensino - aprendizagem. O Gráfico 4 e as respostas a seguir demonstram essa visão dos alunos (Foto 5).

Gráfico 4 – Resposta da questão 4



Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

Foto 5 – Destaques de resposta à questão 4



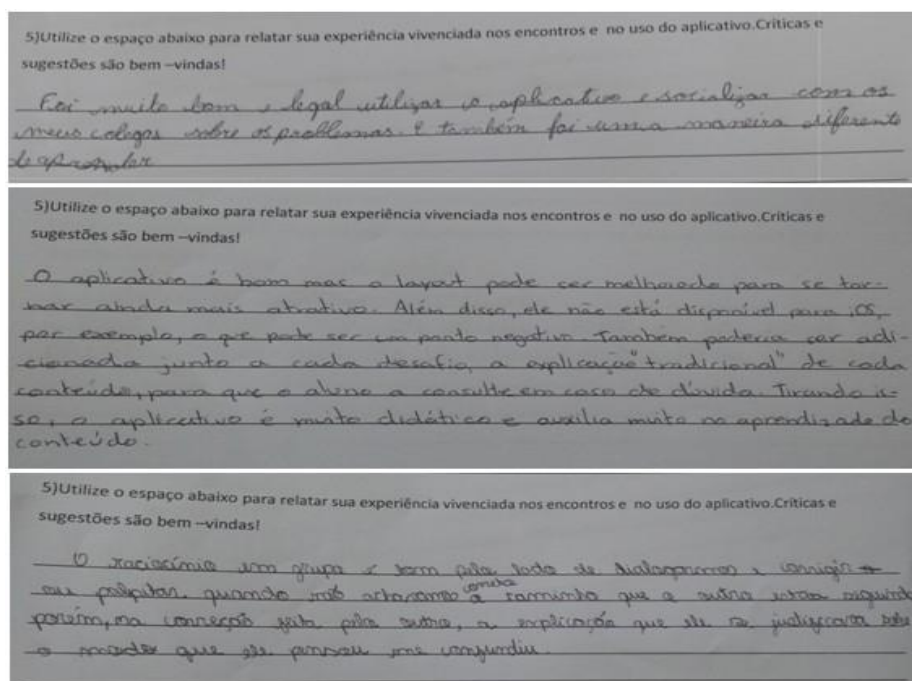
Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

Por fim, o último item do questionário apresentou um espaço para que cada participante da pesquisa relatasse sua experiência e apresentasse sugestões e/ou críticas para futuras

melhorias do jogo “Foca na Comb”. A oportunidade da socialização e discussão em grupo foi a temática apresentada na maioria das respostas dos alunos. Segundo eles, a discussão em grupo e a socialização podem contribuir para a compreensão sobre Análise Combinatória. A oportunidade de aprenderem juntos foi algo marcante para eles. Merece destaque também a dinâmica das aulas com a utilização do jogo. De acordo com as falas escritas e/ou gravadas dos alunos participantes, em sua maioria, o aplicativo "Foca na Comb" possibilitou "aulas diferentes daquelas em que o professor fala e o aluno somente ouve", de acordo com a opinião de um aluno participante da pesquisa. Outro aluno destacou que “nunca tinha participado de aulas de Matemática com debates” e outra resposta destaca que “foi muito legal aprender Matemática usando o celular”.

No último item do questionário também foram feitas algumas sugestões. O fato do aplicativo não estar disponível para *smartphone* com IOS foi destaque em várias respostas desse item do questionário. Também foram feitas sugestões de melhorias para o aplicativo, como sugestões de mudança das telas, cores e até mesmo sugestão de áudio do som de uma foca, após a resolução correta de cada desafio. A foto 6 apresenta algumas das respostas que mostram estas opiniões.

Foto 6 – Destaques de resposta à questão 5



Fonte: Elaborado pelo autor com os dados da pesquisa

É importante citar que os desafios IV, VI e VIII presentes no jogo “Foca na Comb” não foram propostos para serem discutidos e resolvidos durante os encontros com os alunos. Mas, após o período de testes realizados em outubro de 2016, vários alunos disseram ter concluído o jogo, resolvendo todos os oito desafios. Muitos outros ainda não haviam concluído o jogo, mas estavam pensando nos desafios que não haviam resolvido.

O aplicativo foi bem aceito pelos alunos. Isso foi notado por meio da observação durante todo o processo da pesquisa desenvolvida durante as aulas e também por meio de conversas ao final dos encontros. Esse fato tornou as aulas mais dinâmicas e atraentes para a compreensão de conceitos ligados à Análise Combinatória, porém o aplicativo precisava de melhorias, que foram realizadas no mês de setembro de 2016. Em resumo, mesmo com limitações, o uso do “Foca na Comb” foi satisfatório para a utilização da metodologia proposta para os encontros e eficiente para que os alunos pudessem ter acesso à compreensão dos novos conceitos.

Todos os registros da pesquisa, tais como, questionários preenchidos e fotos, fazem parte do acervo do professor - pesquisador.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou verificar, mesmo que em uma escala menor, que o ensino da Análise Combinatória, por meio de jogos, facilitou o entendimento e a compreensão do tema pelos alunos. Esse fato corrobora Silva (2013), que afirma que o ensino de Análise Combinatória é muito mais do que simplesmente decorar fórmulas matemáticas. As diferenças entre a teoria e a prática quando se compara o que se aprende em sala de aula com as situações reais vividas pelo aluno em seu cotidiano evidenciam uma melhoria no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Refletindo sobre este cenário, pode-se pensar em metodologias e práticas pedagógicas que promovam um ambiente favorável ao aprendizado em sala de aula, por meio de atividades que favoreçam a investigação e o interesse pela descoberta do “novo”.

A pesquisa relatada nessa dissertação pôde experimentar essa visão descrita por Barbosa e Carvalho (2008), na qual o ensino da Matemática, mesmo que ainda em construção, deve estar centrado na prática pedagógica baseada nas relações entre o ensino, a aprendizagem e o conhecimento matemático. Dessa maneira, os objetivos básicos da Educação Matemática buscam desenvolvê-la como campo de investigação e de produção do conhecimento. O processo investigativo vivido pelos alunos por meio de um jogo possibilitou a construção de um conhecimento sólido e com significado.

Nos últimos anos, tem surgido uma nova possibilidade na busca de um ensino-aprendizagem significativo da Matemática, relacionado com o cotidiano dos alunos e formador de conceitos construtivos de acordo com Cavalcante (2010). Essa nova possibilidade vem ganhando espaço e se mostrando uma forte ferramenta para os profissionais da educação: são as chamadas TIC's (Tecnologias de Informação e Comunicação). Nelas estão incluídas o uso de microcomputadores e softwares educativos nas aulas de Matemática e ciências afins, dentro de um contexto interdisciplinar. O aplicativo “Foca na Comb”, desenvolvido para smartphones, exemplifica o relato de Cavalcante (2010), mostrando que a tecnologia utilizada adequadamente, de modo responsável, pode contribuir para o aprendizado significativo.

Assim, chegou-se à conclusão que o uso de novos recursos tecnológicos pode contribuir para a mudança no ensino da Análise Combinatória por meio de memorizações de fórmulas. Entretanto, estes recursos precisam ser utilizados de modo responsável e ter objetivos bem definidos com vistas a uma melhoria no aprendizado dos alunos. Isso não

quer dizer que a figura do professor se tornou obsoleta e sem importância, ou seja, ele não perderá o seu espaço, mesmo diante dos recursos educacionais mais avançados. A figura do professor é de extrema e vital importância para a mediação da construção do saber, pois espera-se que a tecnologia sem professor não seja suficiente para o aprendizado satisfatório do aluno. Nessa modalidade, é preciso que alguém faça a conexão da “ferramenta com o operário”, auxiliando o operário (aluno) a dominar as funções de sua nova ferramenta (recurso tecnológico), de modo que ele descubra e se sinta motivado dentro do processo da construção do conhecimento.

Desse modo, a presente dissertação procurou discorrer sobre como o ensino da Análise Combinatória, por meio de um jogo, pode promover mudanças no cenário atual. Desse modo, o aplicativo criado no formato de jogo para celulares foi fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa. A opção do aplicativo no sistema operacional Android, foi devido ao fato da popularidade e facilidade de acesso desse sistema entre os jovens e adolescentes. Foram estudadas maneiras e possibilidades de metodologias que pudessem ser utilizadas para que este aplicativo alcançasse o seu objetivo central que era promover uma aula investigativa sobre Análise Combinatória que fosse atraente para os alunos e com a mediação do professor.

Para possibilitar este projeto, foi necessária a criação de uma sequência didática, baseada em situações-problema relacionadas com Análise Combinatória. Essa sequência didática serviu de suporte para a criação do aplicativo no formato de jogo para plataforma *Android* e foi desenvolvido pelo professor-pesquisador juntamente com alunos de graduação do curso de Sistemas de Informação da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). O aplicativo foi denominado “Foca na Comb”.

A sequência didática foi elaborada por meio de desafios que possibilitaram a discussão e análise sobre os caminhos e estratégias para sua resolução pelos alunos. Com isso, saiu de cena a figura centralizadora do professor, pois o docente passou a ser apenas o mediador do processo da construção do conhecimento, e o aluno passou a ser a figura mais importante. Além disso, os alunos tiveram um papel importante na criação do aplicativo, pois fizeram sugestões para a melhoria do jogo “Foca na Comb”.

Os alunos tiveram um papel importante na criação do aplicativo. Depois do último encontro, um questionário foi respondido por eles, com o objetivo de que eles pudessem registrar a experiência vivida por cada um deles dentro da pesquisa, além de sugerir melhorias para o jogo “Foca na Comb”.



A análise das respostas, escritas e gravadas, dadas por alguns destes alunos, nesta pesquisa, mostra que trocar o ensino mecânico, baseado muitas vezes na memorização de fórmulas, pelo ensino baseado na resolução de problemas pode ser benéfico para a construção do saber. Os próprios alunos, no momento da discussão em grupo, conseguiram, na maioria das vezes, expressar suas dúvidas além de sugerir outras maneiras de resolução dos desafios que foram propostos. Os alunos não somente se interessaram pelo jogo como também pesquisaram sobre o tema em livros e outras fontes na internet.

Durante os encontros, a competição entre os grupos foi bem intensa, pois cada grupo queria resolver os desafios mais rapidamente que os demais, mesmo que essa competição não tenha sido estimulada pelo professor-pesquisador.

Até o desenvolvimento dessa pesquisa, o professor-pesquisador havia trabalhado com o ensino de Análise Combinatória em turmas de segundo ano do Ensino Médio, na mesma escola onde essa pesquisa foi realizada, entre os anos de 2009 e 2015, utilizando apenas as fórmulas da Permutação, Arranjo e Combinação. O rendimento dos alunos nunca havia sido satisfatório, pois a maioria deles não demonstravam interesse sobre o assunto. Após a experiência da utilização do “Foca na Comb” e de aulas dinâmicas, o professor-pesquisador percebeu que, num primeiro momento, houve uma melhoria no processo de construção do conhecimento, pois foi observado o interesse dos alunos em aprender.

Algumas questões devem ser colocadas nesse momento. Apesar de este estudo relatar uma experiência que apresentou bons resultados, muito ainda é preciso fazer para mudar o ensino da Análise Combinatória. Por isso, o aplicativo “Foca na Comb” é uma sugestão metodológica que foi disponibilizada como produto dessa pesquisa, com a finalidade de promover o acesso e utilização de outros docentes. Espera-se, também, que esses usuários façam sugestões e/ou proponham melhorias para que este aplicativo possa ser uma ferramenta que proporcione mudanças positivas para o ensino de Análise Combinatória.

O preenchimento de um questionário pelos alunos participantes também gerou dados para essa pesquisa. Porém, fica aqui registrado que não houve tempo hábil para a participação dos outros professores de Matemática da escola envolvida. Uma sugestão para trabalhos futuros é envolver os demais professores e contemplar a quantificação de suas percepções no desenvolvimento de pesquisas similares a esta. A aplicação de um questionário para que esses docentes possam avaliar a utilidade e eficácia do aplicativo

poderá ser proveitosa para melhorias, tanto no aplicativo quanto na metodologia de ensino.

É importante destacar que o aplicativo pode ser implementado por qualquer professor, sendo possível alterar e acrescentar desafios, mudar o *design* das telas e fazer alterações para que o aplicativo esteja adequado para a realidade do professor e do aluno. Novas atualizações poderão ser benéficas na eficácia do aplicativo. Detalhes técnicos sobre o aplicativo estão no produto desta dissertação.

Finalmente, é de fundamental importância destacar que muitas das novas tecnologias desenvolvidas no início do século XXI estão presentes no cotidiano do aluno. Apesar de muitas críticas serem feitas ao uso dessas tecnologias dentro do ambiente escolar, não se pode ignorá-las e deixá-las de lado. De acordo com Cavalcante (2010):

[...] vemos nessa área uma grande chance de diminuir as disparidades e as deficiências no processo de ensino aprendizagem, poder contar com tais recursos é fundamental no momento atual em que vivemos onde o professor precisa se colocar como um pesquisador, refletindo sua prática e buscar em não ser apenas coadjuvante e sim um formador de cidadãos participativos e fazedores de justiça social. (CAVALCANTE, 2010, p.7)

Diante desta questão, não apenas o ensino da Análise Combinatória precisa ser repensado. Outras áreas da Matemática como a teoria da Probabilidade, Geometria e Trigonometria, dentre outras, poderão ter avanços significativos no processo de ensino-aprendizagem por meio de novas tecnologias apropriadas, pois elas fazem parte do cotidiano do aluno. Utilizando esse fato como aliado, conceitos matemáticos podem ser introduzidos, de tal maneira que auxiliem aos alunos nas descobertas e no aprendizado. Outros recursos educacionais podem ser criados e utilizados por meio de outros tipos de tecnologias disponíveis, assim, professor, escola e principalmente os alunos serão os maiores beneficiados. A Matemática não está presente apenas na escola, pois ela faz parte do nosso dia-a-dia. Essa dissertação espera contribuir para uma reflexão que possibilite uma diminuição da distância “escola-vida real”.

O aplicativo "Foca na Comb" em breve estará disponível para *download* no *Play Store* (loja virtual do *Google* para celulares com o sistema *Android*). Ele também está disponível para *download* no produto final dessa dissertação. Para trabalhos futuros, fica como sugestão a realização da portatbilidade do jogo para *IOS*, sistema operacional móvel da *Apple*, visto que também no produto dessa dissertação, encontra-se o código fonte do aplicativo.

## REFERÊNCIAS

- ALBERTO, J. **Matemática para concursos públicos e vestibulares**. São Paulo: Digerati Books, 2008. 144 p.
- ALMEIDA, A. L. d.; FERREIRA, A. C. Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do ensino fundamental e 2º ano do ensino médio. In: **IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto**. Ouro Preto: UFOP, 2009. p. 1–20. Acesso em: 17 fev. 2016. Disponível em: <[http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebapem2008/upload/261-1-A-gt11\\_almeida\\_e\\_ferreira\\_ta.pdf](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf)>
- BARBOSA, S. L. P.; CARVALHO, T. O. d. Jogos matemáticos como metodologia de ensino aprendizagem das operações com números inteiros. **Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional. UEL-Londrina**, 2008.
- BETTS, A. et al. **As Tecnologias e as Novas Formas de Subjetivação**. s.d. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/e-psico/subjetivacao/tecnologia/tecnologias-texto.html>>. Acesso em: 06 dez. 2016.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília, DF, 2000. 109 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 20 ago. 2016.
- CABRAL, M. A. A utilização de jogos no ensino de matemática. **Trabalho de Conclusão de Curso**, 2006.
- CAVALCANTE, N. I. dos S. O ensino da matemática no contexto das novas tecnologias: refletindo as potencialidades do uso de softwares dinâmicos como recurso em sala de aula. In: **V CONNEPI-2010**. Maceió: [s.n.], 2010.
- COSTA, E. R. S. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria á prática**. Campinas, SP: Papyrus, 1996, p. 17-28. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844 p.
- FERNANDES, D. Brasil reduz alunos sem conhecimento básico de matemática, mas continua atrás em ranking. **BBC Brasil**, fev. 2016. Disponível em: <<http://g1.globo.com/educacao/noticia/2016/02/brasil-reduz-alunos-sem->

conhecimento-basico-de-matematica-mas-continua-atras-em-ranking. html>.  
Acesso em: 06 dez. 2016.

FERNANDES, J. A. da S.; OLIVEIRA, E. B. de. **A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula**. IFES, Vitória, 2015.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FREIRE, B. T. V. **Notas de Aula: Análise Combinatória**. 2001. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA220/n02.pdf>>.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas: Perspectivas em Educação Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de São Paulo, 1988.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998, Brasília. **Anais eletrônicos...** Brasília, 1998. Disponível em: <[http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem\\_mat.pdf](http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf)>. Acesso em: 08 dez. 2016.

JUCÁ, S. C. S. A relevância dos softwares educativos na educação profissional. **Ciências & Cognição**, Instituto de Ciências Cognitivas, v. 8, p. 22–28, 2006.

LIMA, T. R. C. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. [S.l.]: Papirus, 1997.

LUPINACCI, V. L. M.; BOTIN, M. L. M. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC18361331034.pdf>>. Acesso em: 08 dez. 2016.

MENDES, F. R. **Tecnologia e a construção do conhecimento na sociedade da informação**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, 2007.

MERCADO, L. P. L. et al. Formação docente e novas tecnologias. In: **Anais do IV Congresso da Rede Iberoamericana de Informática Educativa**. [S.l.: s.n.], 1998. p. 1–8.

MICHAELIS: **Dicionário Escolar Língua Portuguesa (Nova Ortografia)**. [S.l.]: Editora Melhoramentos, 2015. ISBN 8506054974.

MIRANDA, A. L. **Da natureza da tecnologia: uma análise filosófica sobre as dimensões ontológica, epistemológica e axiológica da tecnologia moderna.** Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, 2002.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORGADO, A.C.O, CARVALHO, J.B.P., CARVALHO, P.C.P, FERNANDEZ, P.. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MORGADO, A.C.O, CARVALHO, J.B.P., CARVALHO, P.C.P, FERNANDEZ, P.. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. **Educación matemática**, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996.

PERIUS, A. A. B. **A tecnologia aliada ao ensino da matemática.** 55 f. Monografia (Especialização) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, 2012.

PICOLLI, L. A. P. **A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação.** Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2006.

POLYA, George. A arte de resolver problemas. **Rio de Janeiro: interciência**, v. 2, 1978.

RIBEIRO, E. F. F. O ensino da matemática por meio de jogos de regras. **Trabalho de Conclusão de Curso**, 2009.

ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares**, v. 10, 2001.

ROMERO, D. D. **O ensino da matemática através da resolução de problemas.** PUCPR, Curitiba, 2007.

SANTOS, M. A. dos. Novas tecnologias no ensino de matemática: possibilidades e desafios. **Revista Modelos**, v. 1, n. 1, p. 38–44, Ago 2011. Disponível em: <[http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto\\_2011/#/page/39](http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/#/page/39)>.

SANTOS, R. C. dos. Brincando e aprendendo: a importância do brincar no desenvolvimento cognitivo, afetivo e social da criança na educação infantil. 2010. Universidade Estadual da Bahia. **Trabalho de Conclusão de Curso.** Disponível em: <<https://www.uneb.br/salvador/dedc/files/2011/05/Manografia-Rosana-Cerqueira-dos-Santos.pdf>>. Acesso em: 13 set. 2010.

SILVA, J. C. T. da. Jogo de combinatória: Uma proposta para a formação inicial de professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., Goiânia. **Anais eletrônicos...** Goiânia: IFES, 2013. Grupo de Discussão. Disponível em: <[http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebapem/xvii\\_ebapem/paper/view/829](http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebapem/xvii_ebapem/paper/view/829)>. Acesso em: 06 dez. 2016.

SILVA, L. A. da. **Apostila de Android: Programando passo a passo**. 2015. Disponível em: <<http://othonbatista.com/arquivos/android/apostila-android.pdf>>.

SILVEIRA, R. M. C. F.; BAZZO, W. A. Ciência e tecnologia: Transformando a relação do ser humano com o mundo. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 9., Santos. **Anais eletrônicos...** Ponta Grossa: SBMAC, 2005. Disponível em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/processoscivilizadores/portugues/sites/anais/anais9/artigos/workshop/art19.pdf>>. Acesso em: 06 dez. 2016.

SOUSA, A. B. de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. 2001. Universidade Católica de Brasília. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <<https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>>. Acesso em: 06 dez. 2016.

STANIC, George MA; KILPATRICK, Jeremy. Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática. CHARLES, RI et al. **The Teaching and Assessment Problem Solving**, 1989.

TOLEDO, B. D. S. **O uso de softwares como ferramenta de ensino-aprendizagem na educação do ensino médio técnico no Instituto Federal de Minas Gerais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade FUMEC, 2014.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, Scielo, v. 31, p. 443 – 466, 12 2005. ISSN 1517-9702. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1517-97022005000300009&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-97022005000300009&nrm=iso)>.

UNESCO. **Padrões de competência em TIC para professores**. 2009. Disponível em: <<http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001562/156209por.pdf>>. Acesso em: 30 jul. 2017.

UNESCO. **Diretrizes de políticas para a aprendizagem móvel**. 2014. Disponível em: <<http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227770por.pdf>>. Acesso em: 30 jul. 2017.

UNESCO. **A view inside primary school: A World Education Indicators (WEI) cross national study**. 2008. Disponível em: <<http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001624/162406e.pdf>>. Acesso em: 10 fev. 2017.

VASCONCELOS, C. A.; LIMEIRA, K. M.; SILVA, I. B. da. Do real ao virtual: discutindo concepções de alunos da EAD sobre TIC e ensino-aprendizagem da matemática. In: **Anais III Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica**. [S.l.]: URI Santo Angelo, 2015.

VAZQUEZ, C. M.; NOGUTI, F. C. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 7., 2004, Recife. *Anais eletrônicos...* Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>>. Acesso em: 06 dez. 2016.

YAHATA, E. A. **O desenvolvimento de habilidades metacognitivas na resolução de problemas de análise combinatória**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

## ANEXO A -TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (ALUNOS)

**Título da Pesquisa:** A construção de um Objeto de Aprendizagem para o ensino de Análise Combinatória.

**Nome do Pesquisador Principal ou Orientador(a):** Paulo Cezar Monteiro Tavares e professora Dra. Tânia Fernandes Bogutchi(Orientadora)

Natureza da pesquisa: O(a) aluno(a) está sendo convidado(a) a participar desta pesquisa que tem como objetivo criar um Objeto de Aprendizagem com a finalidade de auxiliar o professor do ensino médio no ensino de Análise Combinatória, de modo a poder contribuir para a compreensão significativa do aluno sobre conceitos e relações envolvidos nesse assunto.

1. **Participantes da pesquisa:** 141 alunos do segundo ano do ensino médio da Educação Básica da Escola Educação Criativa localizada no município de Ipatinga, MG.
2. **Envolvimento na pesquisa:** ao participar deste estudo, o(a) aluno(a) permitirá que o (a) pesquisador tenha acesso a todos os dados gerados pela pesquisa. O participante tem liberdade de, se não quiser participar e ainda se recusar a continuar participando, sair em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo para o discente. Sempre que quiser, poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do telefone do pesquisador do projeto.
3. **Sobre as entrevistas:** se necessário, haverá ao final do processo a aplicação de um questionário referente à participação no projeto de pesquisa.
4. **Riscos e desconforto:** a participação nesta pesquisa não traz complicações legais. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução no. 196/96 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos à sua dignidade.
5. **Confidencialidade:** todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Somente o (a) pesquisador (a) e o (a) orientador (a) terão conhecimento dos dados.
6. **Benefícios:** Ao participar desta pesquisa, o(a) aluno(a) não terá nenhum benefício direto. Entretanto, esperamos que este estudo traga informações importantes sobre conceitos envolvendo Análise Combinatória, de forma que o conhecimento que será construído a partir desta pesquisa possa auxiliá-lo na sua vida estudantil.
7. **Pagamento:** O(a) aluno(a) não terá nenhum tipo de despesa para participar desta pesquisa, bem como nada será pago por sua participação.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa. Portanto preencha, por favor, os itens que se seguem.

**Obs:** Não assine esse termo se ainda tiver dúvida a respeito.

### Consentimento Livre e Esclarecido

Tendo em vista os itens acima apresentados, eu, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em participar da pesquisa. Declaro que recebi cópia deste termo de consentimento, e autorizo a realização da pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

---

Nome do Participante da Pesquisa

---

Assinatura do Participante da Pesquisa

---

Assinatura do Pesquisador

---

Assinatura do Orientador

**Pesquisador Principal :Paulo Cezar Monteiro Tavares. ([cezar.monteiro@gmail.com](mailto:cezar.monteiro@gmail.com))- mestrando**  
**Demais pesquisadores:Professora Dra. Tânia Fernandes Bogutchi ([bogutchi@pucminas.br](mailto:bogutchi@pucminas.br))-Orientadora**



## **ANEXO B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PAIS E RESPONSÁVEIS)**

**PESQUISA:** A construção de um Objeto de Aprendizagem para o ensino de Análise Combinatória.

As informações contidas nesta folha têm por objetivo firmar acordo escrito com o(a) voluntário(a) e o responsável pelo(a) voluntário(a) para participação da pesquisa acima referida, autorizando a participação do(a) voluntário(a) com pleno conhecimento da natureza dos procedimentos a que ela(e) será submetida(o).

1. **Natureza da pesquisa:** Esta pesquisa tem como finalidade: Auxiliar o professor do ensino médio no ensino de Análise Combinatória, de modo a poder contribuir para a compreensão significativa do aluno sobre conceitos e relações envolvidos nesse assunto.
2. **Participantes da pesquisa:** 141 alunos do segundo ano do ensino médio da Educação Básica da Escola Educação Criativa localizada no município de Ipatinga, MG.
3. **Envolvimento na pesquisa:** Ao participar deste estudo você permitirá que o (a) pesquisador (a) tenha acesso a todos os dados gerados pela pesquisa. Você tem liberdade de se recusar a participar e ainda de se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo para você. Sempre que quiser poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do contato do pesquisador e do coordenador do projeto.
4. **Sobre as coletas ou entrevistas:** se necessário, haverá ao final do processo a aplicação de um questionário referente à participação no projeto de pesquisa.
5. **Protocolo experimental:** O protocolo experimental será desenvolvido no período de aula curricular de matemática na escola Educação Criativa.
6. **Riscos e desconforto:** Os procedimentos utilizados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética na Pesquisa com Seres Humanos conforme resolução n. 196/96 do Conselho Nacional de Saúde – Brasília – DF.
7. **Confidencialidade:** Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Os dados da(o) voluntária(o) serão identificados com um código, e não com o nome. Apenas os membros da pesquisa terão conhecimento dos dados, assegurando assim sua privacidade.
8. **Benefícios:** Ao participar desta pesquisa você não terá nenhum benefício direto. Entretanto, esperamos que este estudo contribua com informações importantes que deve acrescentar elementos importantes à literatura, onde o pesquisador se compromete a divulgar os resultados obtidos.
9. **Pagamento:** Você não terá nenhum tipo de despesa ao autorizar sua participação

nesta pesquisa, bem como nada será pago pela participação.

10. **Liberdade de recusar ou retirar o consentimento:** Você tem a liberdade de retirar seu consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo sem penalidades.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para permitir a participação do(a) voluntário(a) nesta pesquisa. Portanto, preencha os itens que seguem:

### Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ....., RG ..... após a leitura e compreensão destas informações, entendo que a participação de (escrever o nome do menor), sob minha responsabilidade, é voluntária, e que ele(a) pode sair a qualquer momento do estudo, sem prejuízo algum. Confiro que recebi cópia deste termo de consentimento, e autorizo a execução do trabalho de pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo. Obs: Não assine esse termo se ainda tiver dúvida a respeito

Ipatinga, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Telefone para contato: \_\_\_\_\_

Nome do Voluntário: \_\_\_\_\_

Assinatura do Responsável: \_\_\_\_\_

Assinatura do Pesquisador: \_\_\_\_\_

---

Contatos: Paulo Cezar Monteiro Tavares. ([cezar.monteiro@gmail.com](mailto:cezar.monteiro@gmail.com))- mestrando

Professora Dra Tânia Fernandes Bogutchi ([bogutchi@pucminas.br](mailto:bogutchi@pucminas.br)) - Orientadora

---

**APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS****Breve Questionário Avaliativo: Aluno**

Nome: \_\_\_\_\_ (Não é necessário se identificar)

Turma: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

1) Como você avalia a funcionalidade do aplicativo?

 Ruim                       Regular                       Bom                       ÓtimoOBS: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2) As telas, imagens e os desafios são atrativos?

 Sim                                       NãoPorque? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3) O aplicativo e os desafios ajudaram na compreensão dos conceitos sobre Análise Combinatória?

 Sim NãoPorque? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4) Como você avalia aprender Matemática utilizando jogos?

 Ruim                       Regular                       Bom                       ÓtimoPorque? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5) Utilize o espaço abaixo para relatar sua experiência vivenciada nos encontros e no uso do aplicativo. Críticas e sugestões são bem-vindas!

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



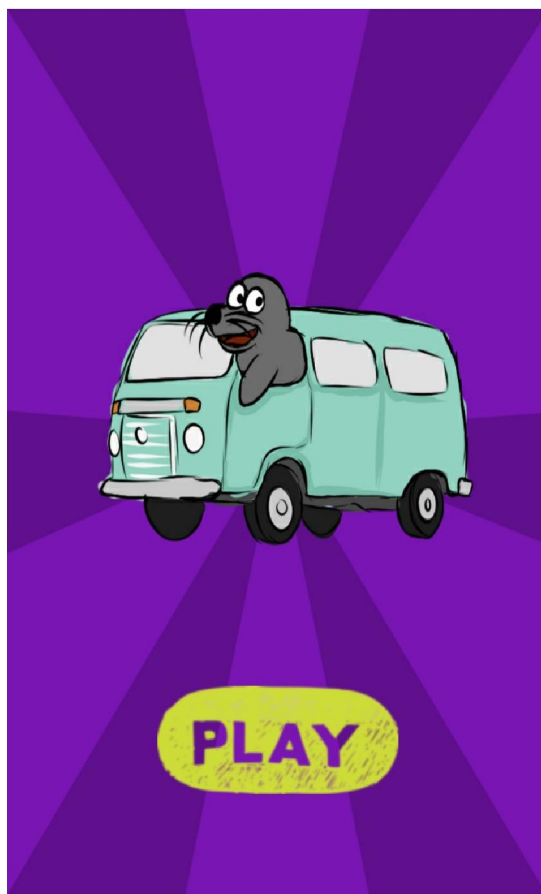
## APÊNDICE B – Aplicativo “FOCA NA COMB”



**PUC Minas**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS

Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática



**Autor:** Paulo Cezar Monteiro Tavares

**Orientadora:** Profa. Dra. Tânia Fernandes Bogutchi

Belo Horizonte 2017



Paulo Cezar Monteiro Tavares

**ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR  
MEIO DE UM APLICATIVO PARA ANDROID**

Belo  
Horizonte  
2017





**LISTA DE IMAGENS**

Imagem 1 – Telas iniciais do "Foca na Comb" .....	110
Imagem 2 – Telas dos desafios "Foca na Comb" - Desafio 1.....	111
Imagem 3 – Telas dos desafios "Foca na Comb" - Desafio 2.....	111



**LISTA DE TABELA**

Tabela 1 – Resumo dos desafios e objetivos .....	117
--	-----



**SUMÁRIO**

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>109</b>
<b>2 O DESENVOLVIMENTO DO APLICATIVO “FOCA NA COMB” -</b>	<b>109</b>
<b>ASPECTOS TÉCNICOS</b>	<b>109</b>
<b>3 SUGESTÃO METODOLÓGICA PARA O USO DO APLICATIVO EM SALA DE</b>	
<b>AULA</b>	<b>113</b>
<b>4 OS DESAFIOS DO APLICATIVO</b>	<b>117</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>125</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O aplicativo “Foca na Comb”, criado para o sistema operacional Android, foi desenvolvido tendo como base uma sequência didática contendo desafios matemáticos com o objetivo de se tornar um recurso que facilite o trabalho do docente no processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Neste material são apresentados: o aplicativo “Foca na Comb”, com detalhes relacionados ao seu funcionamento; sugestão metodológica para a utilização do aplicativo e finalmente, um CD com o código fonte e as orientações para realizar o *download* do jogo.

O aplicativo e as sugestões dadas nesse material foram testados em três turmas do segundo ano do Ensino Médio, nos dias 8, 22 e 29 de agosto e 5 e 12 de setembro de 2016, na Escola Educação Criativa, localizada na cidade de Ipatinga, estado de Minas Gerais. As orientações e sugestões dadas nesse texto visam contribuir para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula.

## 2 O DESENVOLVIMENTO DO APLICATIVO “FOCA NA COMB” - ASPECTOS TÉCNICOS

Foi elaborado um aplicativo para dispositivo *Android*, no formato de um jogo. Essa etapa se iniciou por meio de uma reunião com um grupo de alunos do curso de Sistemas de Informação da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), formando uma parceria entre os alunos e o autor desse material. O aplicativo “Foca na Comb” foi desenvolvido na linguagem Java, utilizando a ferramenta *Android Studio*, para ser executado em dispositivos móveis da plataforma *Android*. Cada desafio corresponde a um conjunto de objetos responsáveis pela exibição de dados, animação e validação das respostas dadas pelo usuário. Esses objetos são embutidos no projeto e fazem uso de arquivos de *layout* que determinam a forma, cores e modo como as informações serão exibidas.

O sistema é coordenado por um mecanismo de controle das fases e é acessado por um mapa que faz uso de um banco de dados para marcar as fases concluídas e liberar a próxima fase para o usuário. Sempre que o usuário marca a resposta certa em um desafio, um controlador grava um registro indicando a conclusão desta fase, dessa maneira, quando o aplicativo é encerrado, a referência de qual fase o usuário se encontra não fica perdida.

Os objetos componentes do sistema são compostos por:

- Classes tipo “Exercício”(Desafios): contém código necessário para validar uma atividade bem como mostrar as instruções. Fazem uso de arquivos de *Layout* para ajustar cores, posicionamento e forma como os dados são mostrados.
- Classes de controle: Coordenam o fluxo de execução dos exercícios(desafios), fazem acesso ao banco de dados. Compõem o Mapa e suas classes auxiliares.
- Classes de interface gráfica: Representam objetos, polígonos, limites e contornos, figuras e imagens de fundo. O tema de cores da aplicação também entra nesta categoria.
- Classes de suporte: Não estão relacionadas diretamente à resolução dos problemas, mas possuem funcionalidades que agilizam o desenvolvimento do aplicativo com funções de manipulação.

As imagens 1, 2 e 3 apresentam algumas telas de alguns desafios presentes no jogo.

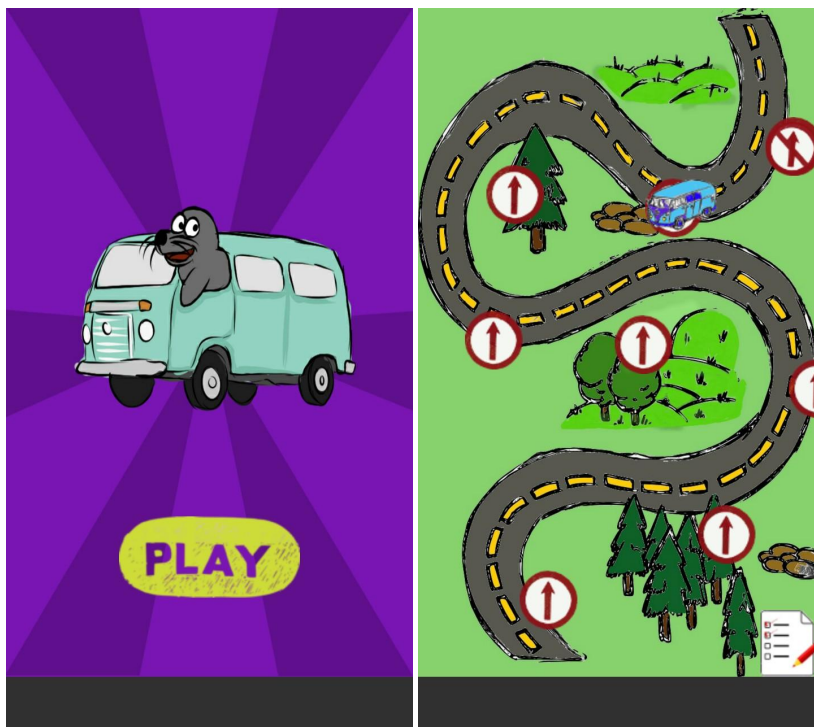


Imagem 1 – Telas iniciais do "Foca na Comb"



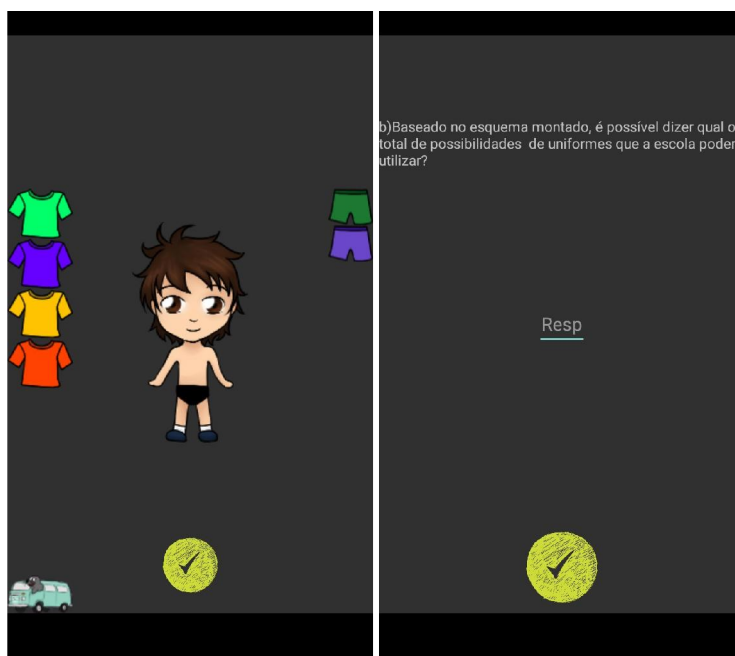


Imagem 2 – Telas dos desafios ”Foca na Comb” - Desafio 1

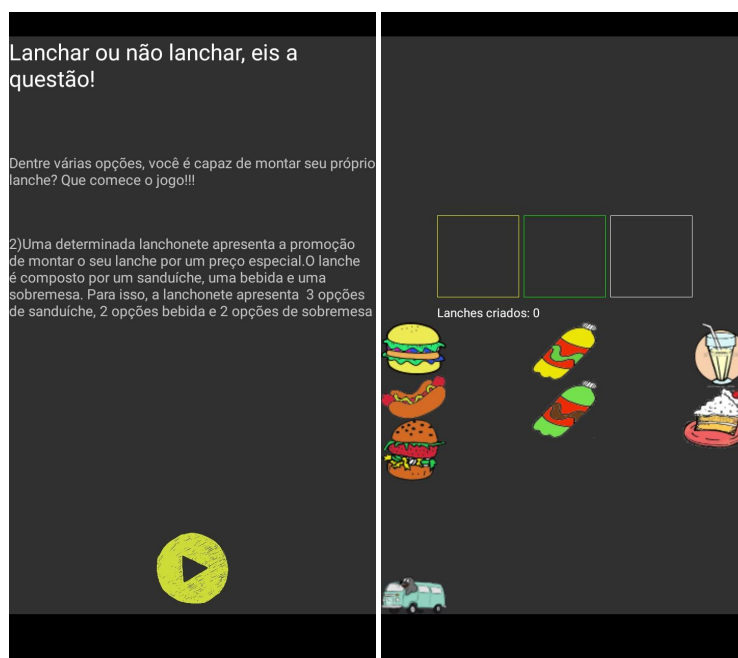


Imagem 3 – Telas dos desafios ”Foca na Comb” - Desafio 2



### 3 SUGESTÃO METODOLÓGICA PARA O USO DO APLICATIVO EM SALA DE AULA

A sugestão metodológica apresentada aqui foi a mesma desenvolvida pelo autor desse material e aplicada em suas turmas supra citadas.

As aulas foram realizadas com duração de 1h 40 min cada, sendo que os alunos não haviam estudado Análise Combinatória em anos anteriores, o que contribuiu significativamente para a introdução de problemas sem a utilização de fórmulas matemáticas.

Nesse primeiro momento, é importante destacar que a intenção na elaboração de cada desafio é de que cada aluno tenha condições de resolvê-lo, sem a necessidade de uma visão formal e teórica sobre Análise Combinatória e as relações matemáticas envolvidas. O objetivo principal é que, de forma atraente e investigativa, os alunos aprendam Análise Combinatória sem a memorização e uso exagerado das fórmulas matemáticas. O professor, nesse processo, deve assumir o papel de mediador na construção do conhecimento do aluno. Desse modo, para a utilização do aplicativo em sala de aula, sugere-se:

(i) No primeiro encontro, o professor deve introduzir o conceito de Fatorial, com suas simbologias e expressões numéricas. Nenhum problema envolvendo contagem deve ser mencionado ou abordado. O objetivo principal nesse primeiro contato é dar aos alunos ferramentas importantes, que poderão ser utilizadas na resolução de problemas sobre Análise Combinatória. Ao final da aula, os alunos devem deixar seus contatos numa lista (e-mail e número de telefone celular) para que o professor possa disponibilizar o aplicativo “Foca na Comb” para os alunos. É importante, nesse dia, avisar aos alunos que o aplicativo será utilizado no próximo encontro.

(ii) No encontro seguinte, também com duração de 1 hora e 40 minutos, irá utilizar o aplicativo em sala de aula. Os alunos que possuem o sistema operacional Android nos celulares devem ter o jogo “Foca na Comb” disponível a partir desse momento.

O professor deve separar os alunos em pequenos grupos. Sugere-se que sejam grupos com 3 ou 4 alunos, em média, pois grupos muito grandes podem prejudicar o aprendizado e distrair a atenção dos alunos. Essa proposta é feita, pois é possível que nem todos os alunos possuam celulares com Android para usar o aplicativo. Além disso, o trabalho em grupo pode promover discussões pertinentes e a interação entre os integrantes pode contribuir para o aprendizado. Com isso, o professor deve propor a cada grupo a

discussão e a resolução dos três primeiros desafios do aplicativo. Nesse momento, é importante que o professor não auxilie os alunos na resolução dos desafios propostos, mas apenas observe o trabalho e a discussão entre eles.

Para a resolução dos primeiros desafios sugere-se um tempo em torno de 30 minutos. Esse tempo deve ser suficiente para a conclusão da discussão em todos os grupos. A partir desse momento, pode ser promovida uma discussão com toda a turma reunida, sobre as formas adotadas pelos alunos para resolver os desafios. O professor pode moderar essa discussão. O professor pode propor novos problemas, baseados nos três desafios resolvidos no encontro, para que os alunos possam pensar e resolver individualmente durante a semana.

(iii) No terceiro encontro, deve ser realizada a discussão e correção dos problemas propostos para os alunos resolverem durante a semana. O intuito é fixar os conceitos abordados no encontro anterior. Logo após, o aplicativo “Foca na Comb” deve ser retomado e novamente a turma deve ser organizada em pequenos grupos para a resolução de três novos desafios (desafios IV, V e VI do aplicativo), sendo estimado um tempo de aproximadamente 30 minutos para que os grupos possam discutir e resolvê-los. Esse tempo deve ser suficiente para que todos os grupos consigam desenvolver o trabalho proposto.

Como foi realizado no segundo encontro, o professor não deve fazer intervenções para ajudar os alunos na resolução dos problemas. Logo após, um novo momento de discussão, moderado pelo professor pode ser realizado, envolvendo todos os grupos, com o intuito de identificar as estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos. Nessa discussão, os conceitos sobre Combinação Simples e Arranjo Simples podem ser introduzidos naturalmente, à medida que as estratégias de resolução forem levantadas pelos alunos. Ao final, o professor pode propor novos problemas relacionados aos

temas da aula, para que os alunos resolvam durante a semana, com o objetivo de promover um novo debate no início do próximo encontro.

É importante destacar que até, o terceiro encontro, os conceitos de Princípio Aditivo e Multiplicativo, Permutações, Combinações e Arranjos podem ser introduzidos naturalmente, porém as fórmulas (relações matemáticas) de Combinação Simples, Arranjo Simples, Permutações Simples e com Repetição, não devem (ainda) ser mencionadas. No primeiro, segundo e terceiro encontros, as resoluções dos desafios devem feitas sem a utilização dessas fórmulas. Para resolver cada desafio até o presente momento, sugere-se o

uso do Princípio Aditivo ou o Princípio Multiplicativo, podendo ser utilizado a árvore das possibilidades, em alguns casos, para uma melhor visualização e compreensão pelo aluno.

(iv) No penúltimo encontro, depois da discussão sobre os problemas propostos pelo professor no final do encontro anterior, podem ser finalmente introduzidas as fórmulas (relações matemáticas) de Combinação Simples, Arranjo Simples, Permutações Simples, com repetição. À medida que cada uma dessas fórmulas for ensinada, o professor pode resolver novamente os desafios anteriores, adotando a formulação matemática adequada para cada um deles. O objetivo é mostrar aos alunos que existem maneiras variadas de se chegar à mesma solução e, assim, as fórmulas passam a ter significado e passam a ser uma ferramenta para o aluno. Depois desse momento, novos problemas podem ser propostos para que os alunos resolvam durante a semana, até a data do próximo e último encontro sobre Análise Combinatória.

(v) Finalmente no último encontro, pode ser sugerido aos alunos que resolvam os dois últimos desafios do jogo “Foca na Comb”, desafios VII e VIII. O tempo de aproximadamente 30 minutos é suficiente para que a turma, novamente dividida em grupos, pense e resolva esses dois últimos desafios. Logo após, com a turma toda reunida, é importante discutir as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os desafios. Esse momento é oportuno para introduzir a fórmula matemática de Permutação Circular e discutir com os alunos sobre a resolução dos problemas propostos apresentados no final da aula anterior. Se necessário, novos exercícios podem ser apresentados para eles.



#### 4 OS DESAFIOS DO APLICATIVO

Tendo como base os aspectos teóricos da Análise Combinatória, o aplicativo “Foca na Comb” foi desenvolvido contendo 8 desafios. Eles foram organizados em ordem crescente no grau de dificuldade. Os dois primeiros desafios tratam de problemas básicos envolvendo o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo. O terceiro desafio aborda conceitos envolvidos em Permutações simples e com repetição, apresentando questões sobre anagramas. O quarto, quinto e o sexto desafios exploram a Combinação simples e Arranjo simples, enquanto o sétimo desafio aborda a Permutação circular e o último desafio trata de uma questão sobre Combinação simples envolvendo Geometria Plana. A tabela 1 apresenta os desafios e objetivos de cada um deles. Os desafios estão organizados em ordem crescente de dificuldade e com a mesma disposição feita no aplicativo. Eles foram criados tomando como base os conteúdos apresentados no livro do Dante (2013) e nas notas de aula de Freire (2001).

Tabela 1 – Resumo dos desafios e objetivos

Desafio	Título	Objetivos
I	Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo	Criar estratégias para agrupar elementos, com auxílio de esquemas e da “árvore de possibilidades”, para que os alunos percebam a adição e a multiplicação como ferramentas de grande utilidade dentro do processo de contagem. Com isso, associa-se o “ou” para o “Princípio Aditivo” e o “e” para o “Princípio Multiplicativo”.
II	Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo	Através de um desafio mais elaborado, fixar os conceitos associados ao desafio I, criar estratégias para agrupar elementos, com auxílio de esquemas e da “árvore de possibilidades”, para que os alunos percebam a adição e a multiplicação como ferramentas de grande utilidade dentro do processo de contagem. Com isso, associa-se o “ou” para o “Princípio Aditivo” e o “e” para o “Princípio Multiplicativo”.

III	Permutação Simples e Permutação com Repetição	Introduzir o conceito de permutação como troca aleatória de posição de elementos, mostrar as diferenças quando os elementos são todos distintos e quando aparecem elementos iguais dentro de um agrupamento e como criar estratégias para contar o número total de configurações que podem ser criadas a partir dessa troca aleatória de posição de elementos.
IV	Arranjo Simples e Combinação Simples	Perceber que, tendo um grupo de $n$ elementos, é possível reagrupar esses elementos em subgrupos com $p$ elementos, com $p$ menor ou igual a $n$ . Mostrar quando a ordem dos elementos deve ser considerada importante ou não, dentro dos novos agrupamentos. Criar estratégias de resolução, sem mencionar as fórmulas matemáticas que envolvem os conceitos de arranjo simples e combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.
V	Arranjo Simples e Combinação Simples	Perceber que, tendo um grupo de $n$ elementos, é possível reagrupar esses elementos em subgrupos com $p$ elementos, com $p$ menor ou igual a $n$ . Mostrar quando a ordem dos elementos deve ser considerada importante ou não, dentro dos novos agrupamentos. Criar estratégias de resolução, sem mencionar as fórmulas matemáticas que envolvem os conceitos de arranjo simples e combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.
VI	Combinação Simples	Através de um desafio mais elaborado, fixar os conceitos desenvolvidos nos desafios IV e V, especialmente em situações-problema quando a ordem dos elementos não é importante dentro do agrupamento. Criar estratégias de resolução, sem mencionar fórmula matemática que envolve o conceito de combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.



VII	Permutação Circular	Mostrar um novo caso de Permutação, onde a disposição de n elementos dentro de um grupo devem estar organizados em forma de círculo. Criar estratégias de resolução, sem mencionar a fórmula matemática que envolve o conceito Permutação Circular, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.
VIII	Combinação Simples	Através de um desafio mais elaborado, fixar os conceitos desenvolvidos nos desafios IV, V e VI, especialmente em situações-problema quando a ordem dos elementos não é importante dentro do agrupamento. Criar estratégias de resolução, sem mencionar a fórmula matemática que envolve o conceito combinação simples, podendo utilizar as 4 operações básicas e o conceito de Fatorial para resolver o desafio.

Fonte: Elaborado pelo autor

Detalhamento dos desafios do aplicativo:

**DESAFIO I (Princípio Multiplicativo / Princípio Aditivo)** - O diretor de uma escola deseja escolher um modelo de uniforme para seus alunos. Para isso, tem disponível 4 modelos de camisas e 2 modelos de bermudas para a composição do uniforme escolar

a) Ajude o diretor a elaborar um esquema ilustrativo que represente o total de possibilidades de uniformes que podem ser obtidos.

b) Baseado no esquema montado, diga qual é o total de possibilidades de uniformes que a escola poderá utilizar. **Resposta: 8**

c) Agora, resolva esse problema por meio de cálculos ! Use o campo abaixo e desenvolva seu raciocínio. **Resposta: 8**

**DESAFIO II (Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo)** - Uma determinada lanchonete apresenta a promoção de montar o seu lanche por um preço especial. O lanche é composto por um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. Para isso, a lanchonete apresenta 3 opções de sanduíche, 2 opções de bebida e 2 opções de sobremesa. Diante dessa situação:

a) Elabore um esquema ilustrativo que represente o total de lanches que podem ser montados.

b) Baseado no esquema montado, qual é o total de possibilidades de lanches que a lanchonete disponibiliza. **Resposta: 12**

c) Resolva esse problema através de cálculos. Use o campo abaixo e desenvolva seu raciocínio! **Resposta: 12**

**DESAFIO III (Permutação Simples e Permutação com Repetição)** - Você sabe o que significa a palavra “anagrama”? De acordo com o dicionário Aulete digital, “anagrama” é a palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Por exemplo, para a palavra “amor”, podemos criar o anagrama “roma” ou “omar”, dentre outros.

a) Pensando na palavra FOCA, diga o número total de anagramas que podem ser formados com essa palavra. Se achar necessário, anote todos os anagramas que você encontrar num papel. Digite o resultado no campo abaixo! **Resposta: 24**

b) É possível encontrar o número total de anagramas de uma determinada palavra sem a necessidade de contagem dos anagramas criados. Voltando à palavra FOCA, represente seu raciocínio matematicamente, através de cálculos e números. Cada lacuna representa o número de possibilidades para escolha de cada letra!

**Resposta: 24**

c) Colocando os anagramas em ordem alfabética, qual a posição em que se encontra o anagrama OFAC? Responda essa pergunta sem fazer a contagem. Como você expressa seu raciocínio através de cálculos? **Resposta: 23**

d) Agora, pense na palavra FACA; Diga o número total de anagramas que podem ser formados com essa palavra. Se achar necessário, anote todos os anagramas que você encontrar num papel. Digite o resultado no campo abaixo!

**Resposta: 12**

e) Você percebe diferenças na análise da palavra FACA em relação a palavra FOCA?

Anote-as e discuta com seus colegas!

f) Calcule o total de anagramas da palavra FACA, sem precisar anotá-las! Lembre-se de que as 4 primeiras lacunas representam o número de possibilidades para escolha de cada letra!

**Resposta: 12**

**DESAFIO IV (Combinação Simples e Arranjo Simples)** Suponha que numa determinada escola há três turmas de segundo ano do ensino médio. O professor de educação física dessa escola pretende realizar um torneio de futsal com a participação dessas três turmas, onde cada turma deve formar duas equipes para a disputa do torneio.

O regulamento do torneio consiste em:

- (i) Todos os times jogam contra todos uma única vez;
- (ii) Os dois times que somarem mais pontos têm o direito de disputar a final do torneio;
- (iii) O time que vencer a final será declarado campeão.

Além disso, a pontuação dos resultados dos jogos consistem em:

- Vitória: 3 pontos;
- Empate: 1 ponto;
- Derrota: 0 ponto.

As equipes formadas pelas turmas I, II e III serão:

- Turma I - Equipes A e B;
- Turma II - Equipes C e D;
- Turma III - Equipes E e F.

Vamos ajudar o professor de educação física na organização do torneio?

(a) Se pensarmos nas possibilidades de premiação para o primeiro e segundo colocado desse campeonato, quantas possibilidades teremos para montar o pódio com o campeão e vice-

campeão, sabendo que todos os times têm as mesmas possibilidades de chegar à final? Represente o seu raciocínio por meio de cálculos!

Resposta: 30

(b) Como ficará a tabela com todos os confrontos (partidas) desse torneio? Elabore um esquema para representar esses confrontos. Sugiro que anote todos os confrontos num papel, para você não os esquecer!

(c) Agora, diga qual é o total de partidas realizadas antes da partida final do torneio.

Resposta: 15

(d) Expresse através de cálculos um raciocínio para responder à questão anterior!

Resposta: 15

(e) Quais são as semelhanças e diferenças na resolução dos itens c) e d)? Você consegue identificar alguma? Discuta com seus colegas e anote essas observações para não esquecer!

**DESAFIO V (Arranjo Simples e Combinação Simples)** Suponha que 10 alunos de uma escola irão concorrer ao sorteio de 4 bolsas de estudos no exterior, válidas para o período de um ano. Pensando nessa situação e com base na nossa caminhada até agora, temos um novo desafio para você:

(a) De quantas maneiras podemos formar o grupo com os 4 alunos sorteados? Resposta: 210

(b) Supondo que o primeiro sorteado terá 100% da bolsa, o segundo sorteado 75%, o terceiro sorteado 50% e o quarto sorteado, 25%, qual o total de possibilidades para a escolha dos 4 alunos sorteados? Resposta: 5.040

(c) Quais são semelhanças e diferenças na resolução dos itens a) e b)? Você consegue identificar alguma? Discuta com seus colegas e anote essas observações para não esquecer!

**DESAFIO VI (Combinação Simples)** Para uma turma de 20 alunos do segundo ano do

ensino médio, um professor de matemática decidiu dividir a turma em 5 grupos de estudo. Diante dessa situação, você é capaz de responder os próximos desafios? Ajude o professor a organizar a turma em pequenos grupos!

(a) Quantos grupos de estudos distintos podem ser formados com esses 20 alunos?

**Resposta: 4.845**

Suponha ainda que Renato, Rafaela, Eduardo e Jéssica sejam alunos dessa turma.

(b) Se Eduardo e Rafaela devem estar sempre juntos na composição de um determinado grupo, quantos grupos podem ser formados tendo esses dois alunos presentes?

**Resposta: 153**

(c) Uma outra questão pode ser levantada. Sabendo que Renato e Jéssica não podem estar juntos num determinado grupo, quantas possibilidades existem para a montagem desse grupo, sabendo que esses dois alunos não estarão juntos? Desenvolva seu raciocínio num papel e digite a resposta no campo a seguir!**Resposta: 4.692**

(d) Quantos grupos podem ser formados tendo em vista que, considerando os alunos Renato e Eduardo, pelo menos um deles esteja presente no grupo? Desenvolva seu raciocínio num papel e digite a resposta no campo a seguir!**Resposta: 1.785**

**DESAFIO VII (Permutação Circular)** Considere uma mesa circular com 4 lugares. Nessa mesa, há uma cadeira azul e três cadeiras verdes. Tendo a cadeira azul como referência, de quantas maneiras podem-se organizar 4 pessoas assentadas nesses lugares? **Resposta: 6**

**DESAFIO VIII (Combinação Simples)** Considere dois segmentos de retas paralelos, AB e CD. Considere ainda um total de 10 pontos sobre esses segmentos de reta, sendo 6 pontos pertencentes ao segmento de reta AB e 4 pontos ao segmento de reta CD. Desse modo, quantos triângulos podem ser formados considerando os pontos nessa disposição? (Importante: Os pontos das extremidades A, B, C, D de cada segmento podem ser incluídos na formação dos triângulos!).**Resposta: 96**



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho tem como finalidade principal propor uma nova forma de abordagem de Análise Combinatória em sala de aula. Esse material, juntamente com o aplicativo “Foca na Comb” e a sugestão metodológica, vem trazer uma alternativa para que o conhecimento seja construído pelo aluno, passo a passo. Cada professor pode adequar os procedimentos sugeridos de acordo com sua realidade. O tempo de aula e a quantidade de encontros, por exemplo, são flexíveis. Cada docente pode efetuar modificações dentro de seu contexto de trabalho, desde que essas modificações sejam feitas de modo responsável, não perdendo de vista o objetivo final do trabalho.

O aplicativo "Foca na Comb" em breve estará disponível para *download* no *Play Store* (loja virtual do *Google* para celulares com o sistema *Android*). Segue juntamente com este material um CD onde se encontram orientações para o *download* do jogo e o código fonte do aplicativo.